

Exercices supplémentaires : ln

Partie A : Propriétés algébriques

Exercice 1

Exprimer en fonction de $\ln(2)$:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) ; \ln(8) ; \ln(64) ; \ln(2e^2) ; \ln(64e) ; \ln(\sqrt{32}) ; \ln\left(\frac{2}{e}\right) ; \ln\left(\frac{32}{e}\right)$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes

$$A = \ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2) \quad ; \quad B = \ln(\sqrt{5} + 2) - \ln(\sqrt{5} - 2) \quad ; \quad C = \ln\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)$$

Partie B : Equations, inéquations

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes

$$\begin{aligned}\ln(2x + 5) &= 0 \\ \ln(2x - 5) &= 1 \\ \ln(2x - 5) &= 2 \\ \ln(x - 2) + \ln(x - 32) &= 6 \ln(2) \\ \ln(x - 2)(x - 32) &= 6 \ln(2) \\ \ln(-2x + 7) - \ln(4x - 9) &= -\ln(3) \\ \ln(x^2 - 1) &= \ln(4x - 1) - 2 \ln(2) \\ (\ln x)^2 - \ln(x) - 6 &= 0 \\ e^{2x} + 2e^x - 1 &= 0 \\ e^{1+\ln(x)} &= \ln(2)\end{aligned}$$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes

$$\begin{aligned}\ln(4x - 8) &> 0 \\ \ln(4x - 8) &\leq \ln(3) \\ \ln(4x - 8) &> 1 \\ \ln(x + 2) &\leq \ln(x^2) \\ \ln(x - 2) &\geq \ln(2x - 1) \\ \ln(x^2 - 1) &\leq \ln(4x - 1) - 2 \ln(2) \\ \ln(x^2 - x - 2) &< 2 \ln(3 - x) \\ (\ln x)^2 - \ln(x) - 6 &< 0 \\ e^x + e^{-x} - 6 &> 0 \\ \frac{1 + \ln(x)}{2 - \ln(x)} &> 0\end{aligned}$$

Partie C : Etude de fonctions

Exercice 1

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$.

- 1) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) Etudier les variations de f .
- 3) Montrer que $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est positif et en déduire le signe de f .

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$

- 1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- 2) Démontrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ et en déduire les variations de g sur $]0; +\infty[$.
- 3) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à \mathcal{C}_g en $+\infty$.
- 4) Etudier la position relative de \mathcal{C}_g et D .

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln((x-1)(3-x))$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 4

1) On considère la fonction $u: x \mapsto \ln(x) - x$ définie sur $]0; +\infty[$. Etudier les variations de u . Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de u sur $]0; +\infty[$.

2) En utilisant la question précédente, étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 2x$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 \ln(x) - (\ln x)^2$

- 1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 0. Déterminer les asymptotes éventuelles de \mathcal{C}_f .
- 2) Calculer f' et dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
- 3) Préciser les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.
- 4) Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse e^2 .
- 5) On note D_k la droite d'équation $y = k$ avec $k < 1$. Montrer que pour tout réel $k < 1$, la droite D_k coupe \mathcal{C}_f en deux points d'abscisses respectives m et m' .
- 6) Montrer que $mm' = e^2$ pour tout réel $k < 1$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3x - x \ln(x)$.

- 1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Etudier les variations de f .

Exercice 7

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln(x)$.

- 1) Etudier les variations de g . Préciser $g(1)$.
- 2) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$.

- 1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$).

En déduire la limite de f en 0.

- 3) En utilisant la partie A, étudier le sens de variations de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = (x + 1)\ln(x - 3)$.

- 1) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles.
- 2) Vérifier que pour $x > 3$, $f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln(x - 3)$
- 3) Calculer f'' et en déduire les variations de f' .
- 4) Étudier le signe de f' sur $]3; +\infty[$.
- 5) Déterminer le tableau de variations de f .
- 6) Calculer les coordonnées des points d'intersections de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

BozoraChouki

Correction exercices supplémentaires : ln

Partie A : Propriétés algébriques

Exercice 1

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\ln(2)}$$

$$\ln(8) = \ln(2^3) = \boxed{3\ln(2)}$$

$$\ln(64) = \ln(2^6) = \boxed{6\ln(2)}$$

$$\ln(2e^2) = \ln(2) + \ln(e^2) = \boxed{2 + \ln(2)}$$

$$\ln(64e) = \ln(64) + \ln(e) = \boxed{6\ln(2) + 1}$$

$$\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2}\ln(32) = \frac{1}{2}\ln(2^5) = \boxed{\frac{5}{2}\ln(2)}$$

$$\ln\left(\frac{2}{e}\right) = \ln(2) - \ln(e) = \boxed{\ln(2) - 1}$$

$$\ln\left(\frac{32}{e}\right) = \ln(32) - \ln(e) = \boxed{5\ln(2) - 1}$$

Exercice 2

$$A = \ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2) = \ln((\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)) = \ln(5 - 2^2) = \ln(1) = \boxed{0}$$

$$B = \ln(\sqrt{5} + 2) - \ln(\sqrt{5} - 2) = \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{5} + 2)^2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)}\right) = \ln\left(\frac{5 + 4\sqrt{5} + 4}{5 - 4}\right) = \boxed{\ln(9 + 4\sqrt{5})}$$

$$C = \ln\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right) = \ln\left(\sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}\right) = \ln(\sqrt{5 - 4}) = \ln(1) = \boxed{0}$$

Partie B : Equations, inéquations

Exercice 1

$$\ln(2x + 5) = 0 : \text{ Ensemble de résolution : } 2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2} \text{ donc on résout dans }]-\frac{5}{2}; +\infty[$$

$$\ln(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x + 5) = \ln(1) \Leftrightarrow 2x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ donc } \boxed{S = \{-2\}}$$

Remarque : on pouvait aussi composer avec l'exponentielle : $\ln(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(2x+5)} = e^0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 1 \dots$

$$\ln(2x - 5) = 1 : \text{ Ensemble de résolution : } 2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \text{ donc on résout dans }]\frac{5}{2}; +\infty[$$

$$\ln(2x - 5) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(2x-5)} = e^1 \Leftrightarrow 2x - 5 = e \Leftrightarrow x = \frac{5+e}{2} \text{ donc } \boxed{S = \left\{\frac{5+e}{2}\right\}}$$

$$\ln(2x - 5) = 2 : \text{ Ensemble de résolution : } 2x - 5 > 0 \text{ donc on résout dans }]\frac{5}{2}; +\infty[$$

$$\ln(2x - 5) = 2 \Leftrightarrow e^{\ln(2x-5)} = e^2 \Leftrightarrow 2x - 5 = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2+5}{2} \text{ donc } \boxed{S = \left\{\frac{e^2+5}{2}\right\}}$$

$$\ln(x - 2) + \ln(x - 32) = 6\ln(2) : \text{ ensemble de résolution : } \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 32 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 32 \end{cases} \text{ donc on résout dans }]32; +\infty[.$$

$$\ln(x - 2) + \ln(x - 32) = 6\ln(2) \Leftrightarrow \ln((x - 2)(x - 32)) = \ln(2^6) \Leftrightarrow (x - 2)(x - 32) = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 34x = 0 \Leftrightarrow x(x - 34) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 34 \text{ donc } \boxed{S = \{34\}} \text{ car } 0 \text{ n'appartient pas à l'ensemble de résolution.}$$

$$\ln(x - 2)(x - 32) = 6\ln(2) : \text{ ensemble de résolution : } (x - 2)(x - 32) > 0 \text{ donc on résout dans }]-\infty; 2[\cup]32; +\infty[$$

$$\ln((x - 2)(x - 32)) = 6\ln(2) \Leftrightarrow \ln((x - 2)(x - 32)) = \ln(2^6) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 34 \text{ (résolution précédente)}$$

Donc $S = \{0; 34\}$

$\ln(-2x + 7) - \ln(4x - 9) = -\ln(3)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} -2x + 7 > 0 \\ 4x - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ x > \frac{9}{4} \end{cases}$ donc on résout dans

$$\left] \frac{9}{4}; \frac{7}{2} \right[$$

$\ln(-2x + 7) - \ln(4x - 9) = -\ln(3) \Leftrightarrow \ln(-2x + 7) + \ln(3) = \ln(4x - 9) \Leftrightarrow \ln(3(-2x + 7)) = \ln(4x - 9)$
 $\Leftrightarrow -6x + 24 = 4x - 9 \Leftrightarrow x = 1,5$ donc $S = \emptyset$

$\ln(x^2 - 1) = \ln(4x - 1) - 2\ln(2)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 4x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$

Donc on résout dans $]1; +\infty[$

$\ln(x^2 - 1) = \ln(4x - 1) - 2\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) + \ln(4) = \ln(4x - 1) \Leftrightarrow \ln(4(x^2 - 1)) = \ln(4x - 1)$
 $\Leftrightarrow 4x^2 - 4 = 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 : \Delta = 64$ donc $x_1 = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$

Finalement $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

$(\ln x)^2 - \ln(x) - 6 = 0$: Ensemble de résolution : $]0; +\infty[$

On pose $X = \ln(x)$ et on résout $X^2 - X - 6 = 0 : \Delta = 25$ d'où $X_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.

On a donc $\ln(x) = 3$ ou $\ln(x) = -2$ et donc $x = e^3$ ou e^{-2} . Finalement $S = \{e^3; e^{-2}\}$

$e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$: Ensemble de résolution \mathbb{R}

On pose $X = e^x$ et on résout $X^2 + 2X - 1 = 0 : \Delta = 8$ d'où $X_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$ et $X_2 = -1 - \sqrt{2}$.

On a donc $e^x = -1 + \sqrt{2}$ ou $e^x = -1 - \sqrt{2}$ ce qui est impossible (e^x est toujours positif...) d'où $x = \ln(-1 + \sqrt{2})$

et donc $S = \{\ln(-1 + \sqrt{2})\}$

$e^{1+\ln(x)} = \ln(2)$: ensemble de résolution $]0; +\infty[$

$e^{1+\ln(x)} = \ln(2) \Leftrightarrow e \times e^{\ln(x)} = \ln(2) \Leftrightarrow ex = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{e}$ donc $S = \left\{ \frac{\ln(2)}{e} \right\}$

Exercice 2

$\ln(4x - 8) > 0$: Ensemble de résolution : $4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc on résout dans $]2; +\infty[$.

$\ln(4x - 8) > 0 \Leftrightarrow \ln(4x - 8) > \ln(1) \Leftrightarrow 4x - 8 > 1 \Leftrightarrow 4x > 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$ donc $S = \left] \frac{9}{4}; +\infty \right[$

$\ln(4x - 8) \leq \ln(3)$: Ensemble de résolution : $4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc on résout dans $]2; +\infty[$

$\ln(4x - 8) \leq \ln(3) \Leftrightarrow 4x - 8 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{11}{4}$ donc $S = \left] 2; \frac{11}{4} \right]$

$\ln(4x - 8) > 1$: Ensemble de résolution : $4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc on résout dans $]2; +\infty[$

$\ln(4x - 8) > 1 \Leftrightarrow \ln(4x - 8) > \ln(e) \Leftrightarrow 4x - 8 > e \Leftrightarrow x > \frac{e+8}{4}$ donc $S = \left] \frac{e+8}{4}; +\infty \right[$

$\ln(x + 2) \leq \ln(x^2)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$ donc on résout dans $] -2; 0[\cup] 0; +\infty[$

$\ln(x + 2) \leq \ln(x^2) \Leftrightarrow x + 2 \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \leq 0 : \Delta = 9$ donc $-x^2 + x + 2$ est du signe de $a = -1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2$. On trouve donc que x doit être inférieur à -1 ou supérieur à 2 .

A l'aide de l'ensemble de résolution, on obtient : $S =] -2; -1[\cup] 2; +\infty[$

$\ln(x - 2) \geq \ln(2x - 1)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$ donc on résout dans $]2; +\infty[$

$\ln(x - 2) \geq \ln(2x - 1) \Leftrightarrow x - 2 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ donc $S = \emptyset$

$\ln(x^2 - 1) \leq \ln(4x - 1) - 2\ln(2)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 4x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 1) > 0 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$ donc on résout dans $]1; +\infty[$

$$\ln(x^2 - 1) \leq \ln(4x - 1) - 2\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) \leq \ln(4x - 1) - \ln(2^2) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) \leq \ln\left(\frac{4x - 1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{4} \leq 0 : \Delta = 4 \text{ donc } x^2 - x - \frac{3}{4} \text{ est du signe de } a = 1 \text{ sauf entre les racines}$$

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}. \text{ L'expression est donc négative sur } \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \text{ et donc } \boxed{S = \left]1; \frac{3}{2}\right[}$$

$$\ln(x^2 - x - 2) < 2\ln(3 - x) : \text{ Ensemble de résolution : } \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ ou } x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \text{ (on résout la première inéquation avec le calcul de } \Delta = 9 \dots) \text{ Finalement, on résout dans }]-\infty; -1[\cup]2; 3[.$$

$$\ln(x^2 - x - 2) < 2\ln(3 - x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - x - 2) < \ln((3 - x)^2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < (3 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow 5x < 11 \Leftrightarrow x < \frac{11}{5} \text{ donc } \boxed{S =]-\infty; -1[\cup \left]2; \frac{11}{5}\right[}$$

$$(\ln x)^2 - \ln(x) - 6 < 0 : \text{ Ensemble de résolution : } x > 0 \text{ donc on résout dans }]0; +\infty[.$$

$$\text{On pose } X = \ln(x) \text{ et on résout } X^2 - X - 6 < 0 : \Delta = 25 \text{ donc } X^2 - X - 6 \text{ est du signe de } a = 1 \text{ sauf entre les racines}$$

$$X_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ donc } X \in]-2; 3[. \text{ Pour revenir à } x, \text{ on a donc } -2 < \ln(x) < 3 \text{ et en}$$

$$\text{composant avec exponentielle qui est strictement croissante, } e^{-2} < x < e^3 \text{ donc } \boxed{S =]e^{-2}; e^3[}$$

$$e^x + e^{-x} - 6 > 0 : \text{ on résout dans } \mathbb{R} \text{ et on pose } X = e^x$$

$$e^x + e^{-x} - 6 > 0 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} - 6 > 0 \Leftrightarrow X^2 + 1 - 6X > 0 \text{ en multipliant par } X \text{ strictement positif}$$

$$\Delta = 32 \text{ donc } X^2 - 6X + 1 \text{ est du signe de } a = 1 \text{ sauf entre les racines } X_1 = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \text{ et } X_2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$\text{On doit donc avoir } X < 3 - 2\sqrt{2} \text{ ou } X > 3 + 2\sqrt{2}. \text{ Pour en revenir à } x :$$

$$\ln(x) < 3 - 2\sqrt{2} \text{ ou } \ln(x) > 3 + 2\sqrt{2} \text{ donc } x < e^{3-2\sqrt{2}} \text{ ou } x > e^{3+2\sqrt{2}}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{S =]-\infty; e^{3-2\sqrt{2}}[\cup]e^{3+2\sqrt{2}}; +\infty[}$$

$$\frac{1+\ln(x)}{2-\ln(x)} > 0 : \text{ Ensemble de résolution : } \begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2 \end{cases} \text{ donc on résout dans }]0; e^2[\cup]e^2; +\infty[. \text{ On va ensuite construire un tableau de signe :}$$

$$1 + \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \text{ et } 2 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2 \Leftrightarrow x < e^2$$

x	0	e^{-1}	e^2	$+\infty$
Signe de $1 + \ln(x)$		-	0	+
Signe de $2 - \ln(x)$		+	+	0
Signe de $\frac{1+\ln(x)}{2-\ln(x)}$		-	0	+

$$\text{Finalement } \boxed{S =]e^{-1}; e^2[}$$

Partie C : Etude de fonctions

Exercice 1

$$1) \text{ Ensemble de définition : } \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ donc } \boxed{D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[}$$

2) En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ et par quotient, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$$

En 1 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(x) = 0^- \text{ donc par quotient } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty} \text{ et de la même manière, } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty}$$

En $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc par quotient } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

3) f est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = \ln(x)$ dérivable et non nul sur l'ensemble de définition donc f est dérivable

$$\text{sur son ensemble de définition et } f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

Sur l'ensemble de définition, x est positif et $(\ln x)^2$ est bien sûr positif également donc f' est négatif et la fonction f est décroissante sur chaque intervalle où elle est définie.

x	0	1	$+\infty$
f	0	$-\infty$	0

Exercice 2

Partie A

1) En 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc par soustraction } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty}$$

En $+\infty$, on met x^2 en facteur : $f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ donc par opérations } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} \text{ mais aussi } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{donc par multiplication } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2) f est de la forme $u - v$ avec $u(x) = x^2 + 1$ dérivable sur $]0; +\infty[$ et $v(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

Le dénominateur est clairement positif donc f' est du signe de $2x^2 - 1$ dont les racines sont $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	+
Variations de f	$+\infty$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$+\infty$

3) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \ln(\sqrt{2})$ et comme $\sqrt{2} > 1$, on peut dire que $\ln(\sqrt{2})$ est positif et par somme $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est positif. Comme il s'agit du minimum de f , on a donc que f est positif sur $]0; +\infty[$

Partie B

1) En 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+ ; \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc par quotient } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \text{ et par addition } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty}$$

En $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc par addition } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

2) g est de la forme $u + \frac{v}{w}$ avec $u(x) = x$ dérivable sur $]0; +\infty[$, $v(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ et $w(x) = x$ dérivable sur $]0; +\infty[$ et non nul donc g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$g'(x) = u'(x) + \frac{v'(x)w(x) - v(x)w'(x)}{w(x)^2} = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

Le dénominateur est clairement positif et f est positif d'après la partie A donc $g'(x)$ est positif et g est croissante sur $]0; +\infty[$.

3) En $+\infty$: $g(x) - x = \frac{\ln(x)}{x}$ et d'après les détails des limites précédentes, ce rapport a pour limite 0 en $+\infty$ donc D est bien une asymptote oblique à C_g en $+\infty$.

4) Pour étudier les positions relatives de C_g et D , on étudie le signe de $g(x) - x$ donc de $\frac{\ln(x)}{x}$. Or le dénominateur est clairement positif sur $]0; +\infty[$ donc c'est du signe de $\ln(x)$ qui est négatif sur $]0; 1]$ et positif sur $[1; +\infty[$. Donc C_g est en dessous de D sur $]0; 1]$ et au dessus de D sur $[1; +\infty[$.

Exercice 3

1) Ensemble de définition : $(x - 1)(3 - x) > 0$ et grâce à un tableau de signe, on trouve $D_f =]1; 3[$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(3 - x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)(3 - x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty}$$

3) f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = (x - 1)(3 - x) = -x^2 + 4x - 3$ dérivable et strictement positif sur $]1; 3[$ donc f est dérivable sur D_f et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-2x+4}{-x^2+4x-3}$

Le dénominateur est positif sur D_f (c'est comme cela qu'est défini D_f) donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 4$.

x	1	2	3	
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Variations de f			0	
	$-\infty$			$-\infty$

Exercice 4

1) u est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Le dénominateur est clairement positif donc $u'(x)$ est du signe de $1 - x$:

x	0	1	$+\infty$	
Signe de $u'(x)$		+	0	-
Variations de u			-1	

Le maximum de u est égal à -1 donc u est négatif sur $]0; +\infty[$.

2) f est de la forme $v^2 - 2x$ avec $v(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = 2v'(x)v(x) - 2 = \frac{2 \ln(x)}{x} - 2 = \frac{2 \ln(x) - 2x}{x} = \frac{2(\ln(x) - x)}{x} = \frac{2u(x)}{x}$$

Le dénominateur est clairement positif et u est négatif d'après la question précédente donc $f'(x)$ est négatif et donc la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5

1) Pour la limite en $+\infty$, on factorise par $\ln(x)$: $f(x) = \ln(x) (2 - \ln(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln(x) = -\infty \text{ et par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

Pour la limite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty \text{ et par soustraction, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty}$$

Cette dernière limite indique que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

2) f est de la forme $2u - u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = 2u'(x) - 2u'(x)u(x) = \frac{2}{x} - \frac{2 \ln(x)}{x} = \frac{2(1 - \ln(x))}{x}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

$$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$$

$$f(e) = 2 \ln(e) - (\ln e)^2 = 2 \times 1 - 1^2 = 1$$

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0 -
Variations de f	$-\infty$	1	$-\infty$

3) Intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses : on résout $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x) - (\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) (2 - \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } 2 - \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^2$$

\mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse 1 et e^2 .

4) Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse e^2 est $y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$

$$\text{Or } f'(e^2) = \frac{2(1-\ln(e^2))}{e^2} = \frac{2(1-2)}{e^2} = -\frac{2}{e^2} \text{ et } f(e^2) = 0 \text{ d'où } \boxed{y = -\frac{2}{e^2}x + 2}$$

5) Intersection de D_k et \mathcal{C}_f avec $k < 1$: on doit résoudre $f(x) = k$. Or d'après le tableau de variations de f , sur $]0; e^2[$, f est continue, strictement croissante et k est bien compris entre la limite de f en 0 et $f(1)$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe une solution à l'équation $f(x) = k$ dans $]0; e^2[$. Un même raisonnement dans $]e^2; +\infty[$, on a une seconde solution à l'équation $f(x) = k$.

6) On note m la solution de $f(x) = k$ qui appartient à $]0; e^2[$ et m' celle de $]e^2; +\infty[$. On a donc

$$f(m) = k = f(m') \text{ or}$$

$$f(m) = f(m') \Leftrightarrow 2 \ln m - (\ln m)^2 = 2 \ln m' - (\ln m')^2 \Leftrightarrow 2(\ln m - \ln m') - [(\ln m)^2 - (\ln m')^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln\left(\frac{m}{m'}\right) - (\ln m - \ln m')(\ln m + \ln m') = 0 \Leftrightarrow 2 \ln\left(\frac{m}{m'}\right) - \ln\left(\frac{m}{m'}\right) \ln(mm') = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{m}{m'}\right) [2 - \ln(mm')] = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{m}{m'}\right) = 0 \text{ ou } 2 - \ln(mm') = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m'} = 1 \text{ ou } \ln(mm') = 2$$

$$\Leftrightarrow m = m' \text{ ou } mm' = e^2$$

La première proposition est impossible au vue des intervalles auxquels appartiennent m et m' donc $\boxed{mm' = e^2}$

Exercice 6

1) En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \text{ donc par soustraction } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$$

$$\text{En } +\infty, \text{ on factorise par } x^2 : f(x) = x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = 2x + 3 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x + 3 - \ln(x) - 1 = 2x + 2 - \ln(x)$$

$$\text{Le signe de } f' \text{ n'étant pas évident à étudier, on calcule } f'' : f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		-	0 +
Variations de f'		$3 + \ln(2)$	
Signe de $f'(x)$		+	+
Variations de f	0		$+\infty$

Exercice 7

Partie A

1) g est de la forme $u - \frac{1}{u} + v$ avec $u(x) = x^2$ dérivable et non nul sur $]0; +\infty[$ et $v(x) = -4 \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$g'(x) = u'(x) + \frac{u'(x)}{u(x)^2} + v'(x) = 2x + \frac{2x}{x^4} - \frac{4}{x} = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} = \frac{2x^4 + 2 - 4x^2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 2x^2 + 1)}{x^3}$$

$= \frac{2(x^2-1)^2}{x^3}$ Le dénominateur et le numérateur sont clairement positifs donc $g'(x)$ est positif et g est croissante.

$$g(1) = 1 - 1 - 4 \times 0 = 0$$

On en déduit que g est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.

Partie B

1) Pour $x > 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (-\ln(x))^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2 = f(x)$$

2) Pour $x > 0$

$$f(x) = x^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^4} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0 \text{ et par addition}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ mais aussi } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

En 0, on pose $X = \frac{1}{x} : f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) = f(X)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} X = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty}$$

3) f est de la forme $u + \frac{1}{v} - w^2$ avec u, v et w dérivables sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{8x}{(4x^2)^2} - \frac{2 \ln(x)}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x^3} - \frac{2 \ln(x)}{x} = \frac{1}{2x} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x \right) = \frac{g(x)}{2x}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de g

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0 +
Variations de f	$+\infty$	\searrow	\nearrow $+\infty$
		$\frac{1}{2}$	

Exercice 8

1) En 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} x + 1 = 4 ; \lim_{x \rightarrow 3} x - 3 = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3} \ln(x - 3) = -\infty \text{ et par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty}$$

En $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 3) = +\infty \text{ et donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

La limite en 3 indique que la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

2) f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x + 1$ dérivable sur $]3; +\infty[$ et $v(x) = \ln(x - 3)$ de la forme $\ln(w)$ avec $w(x) = x - 3$ dérivable et strictement positif sur $]3; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]3; +\infty[$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln(x - 3) + (x + 1) \times \frac{1}{x - 3} = \ln(x - 3) + \frac{x + 1}{x - 3}$$

$$3) f''(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{x-3-4}{(x-3)^2} = \frac{x-7}{(x-3)^2}$$

x	3	7	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	-	0	+
Variations de f'			
Signe de $f'(x)$	+		+
Variations de f			

6) Intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses : on résout $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \ln(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } \ln(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x - 3 = 1$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 4$ La première possibilité n'appartient pas à l'ensemble de définition de f donc le seul point d'intersection de \mathcal{C} et l'axe des abscisses a pour coordonnées $(4; 0)$.

BozoraCharki