Exercices sur la fonction logarithme népérien - Corrigé

ExerciceN°1

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = lnx$ et $g(x) = (lnx)^2$.

On note C et C' les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal. Les courbes C et C' sont données en annexe.

1) a) Étudier le signe de $(lnx)(1 - lnx)$ sur $]0;+\infty[$.

$lnx \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$1 - lnx \geq 0 \Leftrightarrow lnx \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

x	0		1		e		$+\infty$
lnx	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$1 - lnx$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
$lnx(1 - lnx)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

b) En déduire la position relative des deux courbes C et C' sur $]0;+\infty[$.

$f(x) - g(x) = lnx - (lnx)^2 = lnx(1 - lnx)$

Si $x \in]0;1[\cup]e;+\infty[$, $f(x) - g(x) < 0$, soit $f(x) < g(x)$ et donc C est en dessous de C'.

Si $x \in]1;e[$ alors $f(x) - g(x) > 0$, soit $f(x) > g(x)$ et donc C est au dessus de C'.

Si $x = 1$ ou $x = e$, $f(x) = g(x)$ donc les courbes C et C' se croisent.

2) Pour x appartenant à $]0;+\infty[$, M est le point de C d'abscisse x et N est le point de C' de même abscisse.

a) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Étudier les variations de la fonction h sur $]0;+\infty[$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times lnx = \frac{1}{x}(1 - 2lnx)$$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc $h'(x)$ a le même signe que $1 - 2lnx$.

$$1 - 2lnx \geq 0 \Leftrightarrow lnx \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

On en déduit que si $x > \sqrt{e}$ alors $h'(x) < 0$ et donc h est strictement décroissante, si $0 < x < \sqrt{e}$ alors $h'(x) > 0$ et donc h est strictement croissante.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
h	$\Vert$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

$$h(\sqrt{e}) = lne^{\frac{1}{2}} - \left(lne^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Bouzouraa Chaouki

b) En déduire que sur l'intervalle $[1; e]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{e}$.

Sur l'intervalle $[1; \sqrt{e}]$, C est au dessus de C' d'où $h(x)$ est positive et donc représente la distance MN.

Sur l'intervalle $[1; \sqrt{e}]$, MN= $f(x) - g(x) = h(x)$.

Le résultat précédent montre que h admet un maximum en $x = \sqrt{e}$ et que ce maximum vaut $\frac{1}{4}$.

c) Résoudre dans $]0; +\infty[$, l'équation $(lnx)^2 - lnx = 1$

On pose $Y = lnx$.

$(lnx)^2 - lnx = 1 \Leftrightarrow Y^2 - Y - 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$

$\Delta > 0$ donc le polynôme a deux racines $Y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = lnx_1$ et $Y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = lnx_2$.

On en déduit que $x_1 = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $x_2 = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

d) En déduire que sur $]0; 1[\cup]e; +\infty[$, il existe deux réels a et b $(a < b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1.

Sur $]0; 1[\cup]e; +\infty[$, $g(x) - f(x) = (lnx)^2 - lnx > 0$ donc représente la distance MN.

D'après la question précédente, il existe deux valeurs x_1 et x_2 telles que MN=1.

On a donc $x_1 = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = a$ et $x_2 = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = b$

Bouzouraa Chaouki

2) a) On admet que $\int_1^e lnxdx = 1$ (vous pouvez le démontrer par une intégration par parties).

On pose $u(x) = lnx$ et $v'(x) = 1$. On a $\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)dx$. Soit :

$\int_1^e lnxdx = [xlnx]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}dx = [xlnx]_1^e - [x]_1^e = elne - ln1 - e + 1 = 1$.

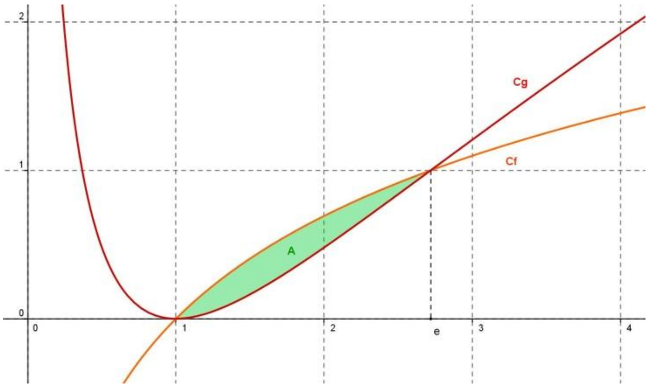
b) Vérifier que la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par $G(x) = x[(lnx)^2 - 2lnx + 2]$ est une primitive de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

$G(x) = x[(lnx)^2 - 2lnx + 2]$

$G'(x) = [(lnx)^2 - 2lnx + 2] + x\left[2\frac{lnx}{x} - \frac{2}{x}\right] = (lnx)^2 - 2lnx + 2 + 2lnx - 2 = (lnx)^2 = g(x)$

c) On considère la partie du plan délimitée par les courbes C et C' et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Déterminer l'aire A, en unité d'aire, de cette partie du plan.



$$A = \int_1^e [f(t) - g(t)]\,dt = \int_1^e f(t)dt - \int_1^e g(t)dt$$

$$A = \int_1^e lntdt - [G(x)]_1^e = 1 - (G(e) - G(1)) = 1 - e + 2$$

Donc $A = 3 - e\ u.a.$

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

La fonction $x \longmapsto x+3$ est strictement positive sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \longmapsto \ln(x+3)$ est bien définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ ainsi que la fonction f comme quotient de fonctions dérivables.

Étudier le signe de sa fonction dérivée f'

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+3}\times(x+3)-\ln(x+3)}{(x+3)^2}=\frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

Quelque soit $x \in [0;+\infty[$, $(x+3)^2>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1-\ln(x+3)$

$1-\ln(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+3)\leq 1 \Leftrightarrow x+3\leq e \Leftrightarrow x\leq e-3$

Or $e-3<0$ donc si $x\in[0;+\infty[$, $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante.

Sa limite éventuelle en $+\infty$

On pose $y=x+3$

Quand $x\longmapsto+\infty$ alors $x+3=y\longmapsto+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x+3}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0 \text{ (Théorème de croissances comparées)}$$

Bouzouraa Chaouki

Dresser le tableau de ses variations.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$\frac{\ln 3}{3}$	$\searrow$	0

2) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.

a) Justifier que, si $n\leq x\leq n+1$, alors $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ donc :

$n\leq x\leq n+1 \Longrightarrow f(n)\geq f(x)\geq f(n+1)$.

b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$

$$u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$$

En intégrant sur $[n;n+1]$, on conserve l'ordre de l'inégalité. D'où :

$$\int_n^{n+1}f(n+1)\,dx\leq u_n\leq\int_n^{n+1}f(n)\,dx \Leftrightarrow [f(n+1)x]_n^{n+1}\leq u_n\leq[f(n)x]_n^{n+1} \Leftrightarrow f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc d'aprèsle Théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a) Justifier que F est dérivable et déterminer , pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

La fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ et $u \longmapsto u^2$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et la fonction $\longmapsto u^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$$F'(x) = 2\ln(x+3) \times \frac{1}{x+3} = 2f(x)$$

b) On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$. Calculer I_n.

$$I_n = \int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2}[F(x)]_0^n = \frac{[\ln(n+3)]^2 - (ln3)^2}{2}$$

4) On pose pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$. Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx = \int_0^n f(x)dx = I_n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+3) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+3) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} [\ln(n+3)]^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

La suite (S_n) est divergente.

Bouzouraa Chaouki

ExerciceN°2

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = lnx - 2 + x$.

1) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} lnx = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}(-2+x) = -2$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2+x) = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

Sur $]0;+\infty[$, f est dérivable donc continue, f est strictement croissante, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$0 \in]-\infty;+\infty[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

$f(1{,}55) \simeq -0{,}011 < 0$ et $f(1{,}56) \simeq 0{,}004 > 0$ donc $1{,}55 < \alpha < 1{,}56$ (encadrement à 10^{-2} près).

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative C de la fonction ln, ainsi que la droite D d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

On considère l'aire, en unité d'aire, notée A, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe C et de la droite D.

1) Déterminer les coordonnées du point E.

L'abscisse x_E du point E est solution de l'équation $lnx = 2 - x \Leftrightarrow lnx - 2 + x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Donc d'après la question A-3) $x_E = \alpha$.

Donc $E(\alpha; 2-\alpha)$

Bouzouraa Chaouki

2) Soit $I = \int_1^{\alpha} lnxdx$.

a) Donner une interprétation géométrique de I.

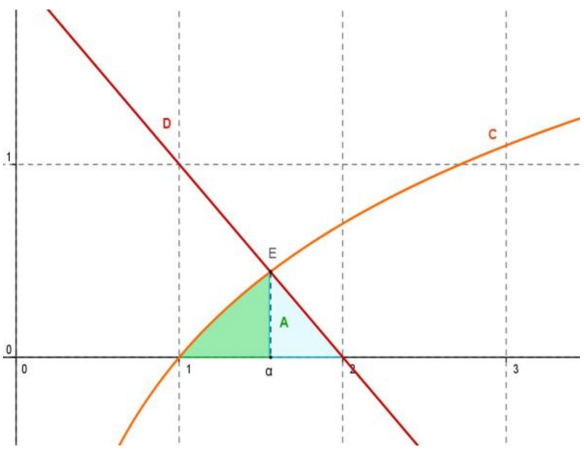
Si $x \geq 1$ alors $lnx \geq 0$ et donc $\int_1^{\alpha} lnx\,dx$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de ln et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) Vérifier que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = xlnx - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire la valeur de I en fonction de α.

$F'(x) = lnx + x \times \frac{1}{x} - 1 = lnx$. Donc F est une primitive de la fonction ln.

$$I = \int_1^{\alpha} lnxdx = [xlnx - x]_1^{\alpha} = \alpha ln\alpha - \alpha - (ln1 - 1) = \alpha ln\alpha - \alpha + 1$$

c) Montrer que I peut aussi s'écrire $-\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.



D'après la question B1,

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow ln\alpha = 2 - \alpha$

donc $I = \alpha ln\alpha - \alpha + 1 = \alpha(2-\alpha) - \alpha + 1 = -\alpha^2 + \alpha + 1$

3) Calculer l'aire A en fonction de α.

$$A = \int_1^{\alpha} lnxdx + \int_{\alpha}^{2} (2-x)\,dx = -\alpha^2 + \alpha + 1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{2}$$

$$A = -\alpha^2 + \alpha + 1 + 4 - 2 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} = -\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 3$$

ExerciceN°3

1) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = lnx - \frac{2}{x}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0		$2,3$	x_0	$2,4$	$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$		0	$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

La fonction $x \longmapsto lnx$ est définie sur $]0;+\infty[$ et la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$ donc $x \longmapsto g(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$.

Ces deux fonctions sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc la somme g est aussi dérivable sur $]0;+\infty[$.

$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ donc la fonction g est strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} lnx - \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} lnx - \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Sur $]0;+\infty[$, g est dérivable donc continue, g est strictement croissante, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

$0 \in]-\infty;+\infty[$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

$g(2,3) \simeq -0,04 < 0$ et $g(2,4) \simeq 0,04 > 0$ donc $2,3 < x_0 < 2,4$ (encadrement à 10^{-1} près).

Bouzouraa Chaouki

2) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5lnx}{x}$.

a) Montrer que $f(x_0) = \frac{10}{{x_0}^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau de variations ci-dessus.

$f(x_0) = \frac{5lnx_0}{x_0}$. Or d'après la question 1) $g(x_0) = lnx_0 - \frac{2}{x_0} = 0$ donc $lnx_0 = \frac{2}{x_0}$ et $f(x_0) = \frac{10}{{x_0}^2}$

b) Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t)dt$ en fonction de a.

$x \longmapsto \frac{lnx}{x}$ est de la forme $u' \times u$ avec $u(x) = lnx$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$. Une primitive de u'.u est de la forme $\frac{u^2}{2}$

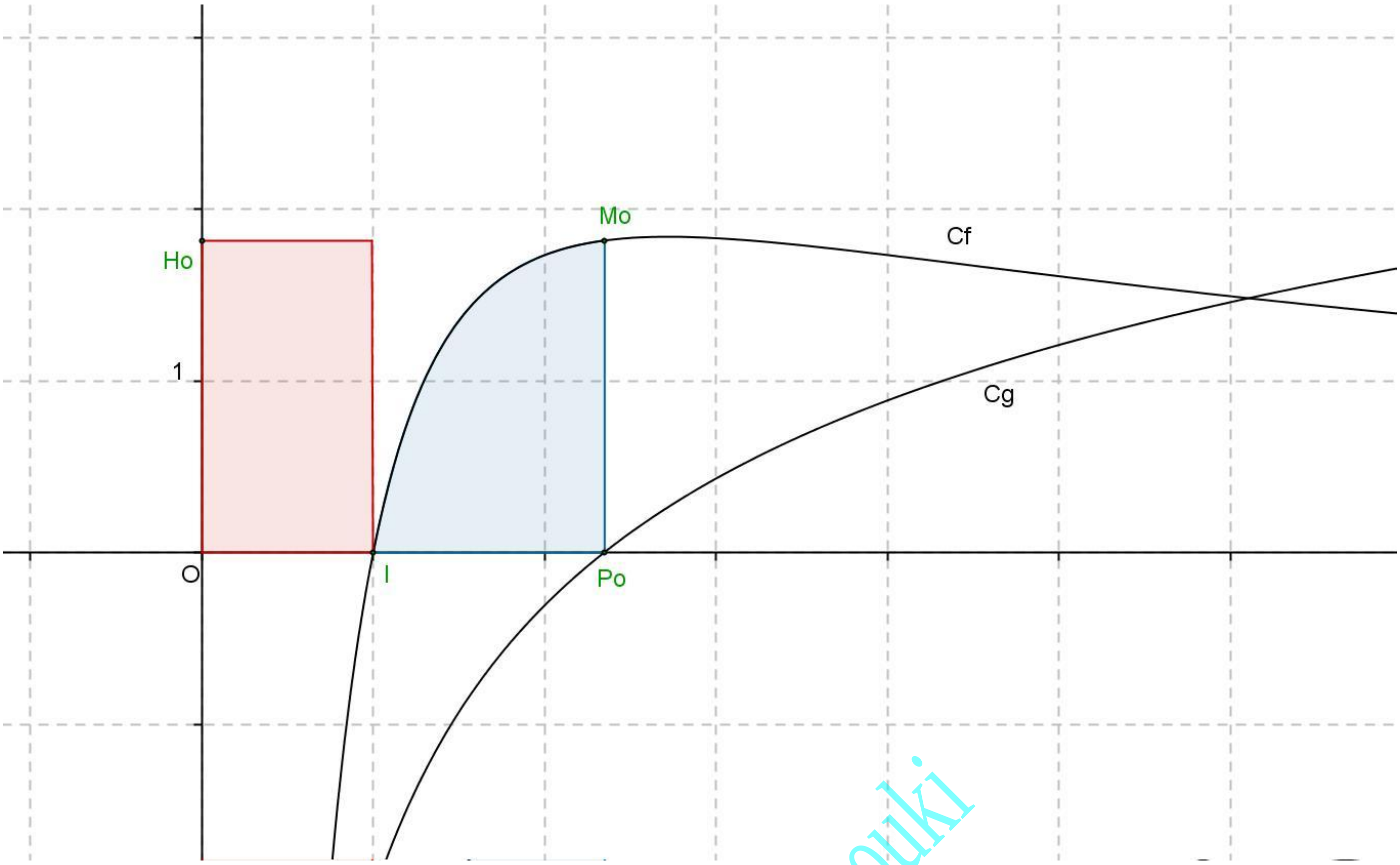
$$\int_1^a f(t)dt = \int_1^a \frac{5lnt}{t}dt = \left[5\frac{(lnt)^2}{2}\right]_1^a = \frac{5(lna)^2}{2}$$

3) On a tracé dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement C_f et C_g. On appelle I le point de coordonnées $(1\,;0)$, P_0 le point d'intersection de C_g et de l'axe des abscisses, M_0 le point de C_f ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme D_1 le domaine du plan délimité par la courbe C_f et les segments $[OI]$ et $[OH_0]$.

On nomme D_2 le domaine du plan délimité par le rectangle du plan construit à partir de $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014



Démontrer que les deux domaines D_1 et D_2 ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.

D'après la question 1, P_0 a pour abscisse x_0 et pour ordonnée 0.

M_0 a aussi pour abscisse x_0 et pour ordonnée $f(x_0)=\frac{10}{{x_0}^2}$.

Donc H_0 a pour ordonnée $\frac{10}{{x_0}^2}$ et pour abscisse 0.

$A(D_1)=\int_1^{x_0} f(t)dt=\frac{5(lnx_0)^2}{2}$

$A(D_2)=1\times\frac{10}{{x_0}^2}=\frac{10}{{x_0}^2}$.

Or $lnx_0=\frac{2}{x_0}$ donc $A(D_1)=\frac{5(lnx_0)^2}{2}=\frac{5}{2}\times\left(\frac{2}{x_0}\right)^2=\frac{10}{{x_0}^2}=A(D_2)$

On sait que $2{,}3<x_0<2{,}4 \Longrightarrow 2{,}3^2<{x_0}^2<2{,}4^2$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2{,}4^2}<\frac{1}{{x_0}^2}<\frac{1}{2{,}3^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{10}{2{,}4^2}<\frac{10}{{x_0}^2}<\frac{10}{2{,}3^2}$$

$$\Longrightarrow 1{,}736<\frac{10}{{x_0}^2}<1{,}891$$

Donc $1{,}7<A(D_1)<1{,}9$ (encadrement à 0,2 près)

Bouzouraa Chaouki