

Exercice N°1

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

- 1) Pourquoi les droites d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à \mathcal{C}_f ?
- 2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f .
- 3) Tracer d , Δ et \mathcal{C}_f
- 4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

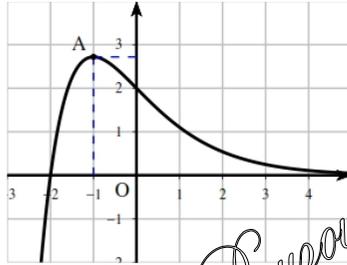
Exercice N°2

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels.

- 1) À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminer a et b .
- 2) Calculer $f'(x)$. En déduire les coordonnées du point A maximum de f



Exercice N°3

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

- 1) Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$ et $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$
- 2) Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
- 3) Démontrer que f est impaire.
- 4) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
- 5) Tracer la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 0$, puis la courbe \mathcal{C} .

Exercice N°4

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x e^x$.

- 1 Dresser le tableau de variations de f .
- 2 Donner, suivant la valeur du nombre réel a fixé, le nombre de solution de l'équation : $f(x) = a$.
- 3 Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) admet une unique solution positive u_n .
- 4 Déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1 , u_2 , et u_3 .
- 5 Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?
- 6 Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* : $0 < u_n < \frac{1}{n}$. Déterminer alors $\lim u_n$.

Exercice N°5

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1) Étude d'une fonction auxiliaire

- a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 e^x - 1$. Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$. On dressera le tableau de variation.
- b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
- c) Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}
- d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2) Étude de la fonction f

- a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.
- e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice N°6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x e^{1-x}$

- 1) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
- 2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- 3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
- 4) Déterminer la dérivée de la fonction f .
- 5) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variation.

Exercice N°7

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

- 1) Dans un repère orthonormal, construire la courbe Γ d'équation $y = e^x$ et la droite d tangente à Γ en $x = 0$.
- 2) Justifier graphiquement que, pour tout réel u : $e^u \geq u + 1$
- 3) En déduire que pour tout réel x : $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ et $1 + (x - 1)e^x \geq 0$
- 4) Démontrer alors que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Lycée Secondaire El Ksour

Exercice N°8

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

- 1 Étudier les variations de la fonction g .
- 2 Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3 En déduire que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

On appelle C représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

- 1 Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
- 2 Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = x$.
 - a) Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b) Étudier la position relative de la droite \mathcal{D} et de la courbe \mathcal{C} sur $[0; 1]$.
- 3 Dans un repère orthonormé, représenter la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} .

Solution Exercice N°1

1) On étudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a) En $+\infty$. On a une forme indéterminée, on change donc la forme de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^x \left(2 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Par quotient, on a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

La courbe \mathcal{C}_f admet donc une asymptote horizontale d en $+\infty$ d'équation $y = 2$.

b) En $-\infty$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - 3 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, on a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

La courbe \mathcal{C}_f admet donc une asymptote horizontale Δ en $-\infty$ d'équation $y = -3$.

2) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(2e^x + 2 - 2e^x + 3)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur \mathbb{R} , la fonction f' est strictement positive sur \mathbb{R} .

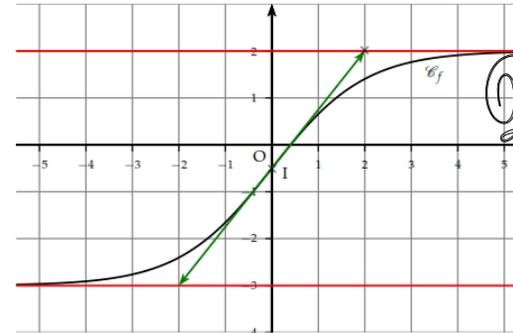
3) On a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-3	2

4) Pour tracer la courbe \mathcal{C}_f , il est important de placer un point et sa tangente. Par exemple le point I d'abscisse nul. On a :

$$f(0) = -\frac{1}{2} \quad f'(0) = \frac{5}{4}$$

On obtient la courbe suivante :



5) La courbe semble symétrique par rapport au point I. Pour le démontrer, prenons un nouveau repère centré en I. Un point $M(x, y)$ a pour coordonnées dans le nouveau repère $M(X, Y)$. On a alors :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = f(x) + \frac{1}{2} = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{4e^x - 6 + e^x + 1}{2(e^x + 1)} = \frac{5(e^x - 1)}{2(e^x + 1)} \end{cases}$$

Montrons que la fonction $g(X) = \frac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)}$ est impaire.

On a :

$$g(-X) = \frac{5(e^{-X} - 1)}{2(e^{-X} + 1)} = \frac{5(1 - e^X)}{2(1 + e^X)} = -g(X)$$

La fonction g est impaire, donc la courbe \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à I