Prof :Khammour.Khalil
Année Scolaire :2013/2014

Série d'exercices
Probabilités

$4^{\text{ème}}$ Sc-exp
Tunis ,Tél :27509639

Exercice n°1 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte. Indiquer sur votre copie, le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1) On désigne par A et B deux événements indépendant d'un univers muni d'une loi de probabilité p.
   On sait que $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ et $P(\overline{A})=\frac{3}{5}$.P(B) est égale à :

   a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{2}$

2) On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètres $\lambda=0,04$. On rappelle que pour tout réel positif t , la probabilité de l'événement $(X\leq t)$, notée P $(X\leq t)$ est donnée par : $P(X\leq t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\,dt$. La valeur approchée P(X >5) à 10^{-2} prés par excès est égale à :
   a) 0,91 b) 0,18 c) 0,19 d) 0,82.

3) Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne. La probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge est égale à :

   a) $\frac{75}{512}$ b) $\frac{13}{56}$ c) $\frac{15}{64}$ d) $\frac{15}{28}$

4) La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{6}$.

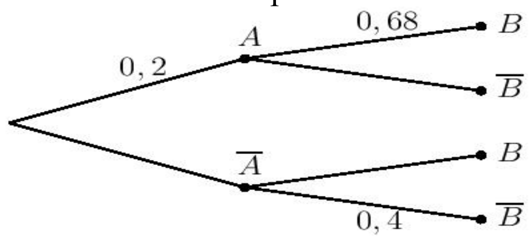
On a donc pour tout réel $t>0$; $P(T\leq t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ (avec $\lambda=\frac{1}{6}$) où t désigne le temps exprimé en minutes. Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes est égale à :
   a) 0, 2819 b) 0, 3935 c) 0, 5654 d) 0, 6065

5) Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale a :
   a) 0,043 b) 0,091 c) 0,111 d) 0,25

6) Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippes, un sur dix est vaccine. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25. la probabilité pour un individu vaccine de cette population de contracter la grippe est égale à :

   a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{3}{40}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{4}{40}$

7) On considère l'arbre de probabilités suivant, $P_B(A)$ est égale à :



   a) 0,136 b) 0,064 c) 0,578 d) 0,264

Exercice n°2 :

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1) On dispose d'un de a 6 faces, parfaitement équilibre, numéroté de 1 a 6. On le lance une fois ; si on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2) On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

Montrer que la probabilité de l'événement « la $3^{éme}$ boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

Exercice n°3 :

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} prés.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélèves.

a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A « il n'y a aucun stylo avec un défaut »

B « il y a au moins un stylo avec un défaut »

C « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note :

D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepte».

a) Construire un arbre traduisant les données de l'énonce.

b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepte au contrôle.

c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepte au contrôle est égale à 0,022 a 10^{-3} prés.

3) Apres le contrôle on prélève successivement et avec remise huit stylos parmi les stylos acceptes.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Exercice n°4 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.

A la fin de la partie, si le joueur a tire deux billes vertes il gagne un PC portable. S'il a tire une bille verte, il gagne lecteur MP3. Sinon il ne gagne rien.

On note :

A l'événement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »

B l'événement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les événements A et B sont indépendants.

1) Montrer, a l'aide d'un arbre pondère, que la probabilité de gagner un PC portable est $p = 0,06$.

2) Quelle est la probabilité de gagner un lecteur MP3?

3) Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un PC portable.
On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} prés.

4) On appelle n le nombre de personnes participant a la loterie un jour donne et jouant une seule fois.
On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un PC portable.
Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n > 0,99$.

Exercice n°5 :

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

On prélève au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ».

Les probabilités des événements A et B sont respectivement p(A) = 0,02 et p(B) = 0,01; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

a) Calculer la probabilité de l'événement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b) Calculer la probabilité de l'événement D « le sac est défectueux ».

c) Calculer la probabilité de l'événement E « le sac ne présente aucun défaut ».

d) Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b?

2) On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des sacs est défectueux » ?

On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice n°6 :

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloques par des événements extérieurs comme des chutes de pierre, des troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son dépôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'au premier blocage. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. On arrondira les résultats au millième.

1) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans blocage soit :
   a) comprise entre 50 et 100 km .
   b) supérieure a 300 km.

2) Sachant que l'autocar a parcouru 350 km sans blocage, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3) a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\mathrm{I(A)} = \int_0^A \frac{1}{82} xe^{\left(-\frac{x}{82}\right)} dx$ où A est un nombre positif.

   b) Calculer la limite *M* de I(A) lorsque *A* tend vers +∞. On admettra que *M* est la **distance moyenne** parcourue par un autocar avant le premier blocage.

4) L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun entre le dépôt et le lieu ou survient un blocage sont des variables aléatoires deux a deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. d étant un réel positif, on note X_d la v.a. égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun blocage après avoir parcouru d kilomètres.
   a) Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.
   b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun blocage après avoir parcouru d kilomètres.

Exercice n°7 :

Le centre National de la Transfusion sanguine a diffusé le tableau ci-contre donnant la répartition des groupes sanguins en Tunisie.

Groupe	A	B	AB	O
Pourcentage	31%	18%	5%	46%

I) 1) Quelle est la probabilité qu'un tunisien ait un sang du groupe O ?
   2) Quatre donneurs se présentent dans un centre de transfusion sanguine.
      a) Quelle est la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O?
      b) Quelle est la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs?

II) Indépendamment du groupe sanguin, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh+), sinon il est dit de Rhésus négatif (Rh-).
Un individu ayant un sang de groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.
En Tunisie, 9% des individus du groupe O sont de Rhésus négatif.
1) Montrer que la probabilité qu'un tunisien soit un donneur universel est 0.0414.
2) Dans un centre de transfusion sanguine, *n* donneurs se présentent.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi les *n* donneurs.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b)Déterminer l'espérance de X en fonction de *n*.
   c) Déterminer le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 donneurs.

Exercice n°8 :

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques.
La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou encore loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1) Sachant que $P(X>10) = 0{,}286$, montrer que $\lambda = 0{,}125$ au centième près.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}125$.

2) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.
4) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5) Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice n°9 :

Khalil fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants tous identiques en apparence, mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0,02.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilés à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Khalil achète 50 composants.

1) Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? En donner une valeur approchée à 10^{-2} prés.
2) Calculer la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?

En donner une valeur approchée à 10^{-2} prés.

3) Quel est dans un lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$

1) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1000 heures :
   a) si ce composant est défectueux
   b) si ce composant n'est pas défectueux

Donner une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-2} prés.

2) Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant achetés au hasard. Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est : $P(T\geq t) = 0{,}02\,e^{-5\times10^{-4}t} + 0{,}98e^{-10^{-4}t}$
3) Sachant que le composant acheté est encore en état de marche 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ? En donner une valeur approchée à 10–3 prés.

Exercice n°10 :

Une usine fabrique en grande série de climatiseurs susceptibles de présenter deux défaux a et b.Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants :

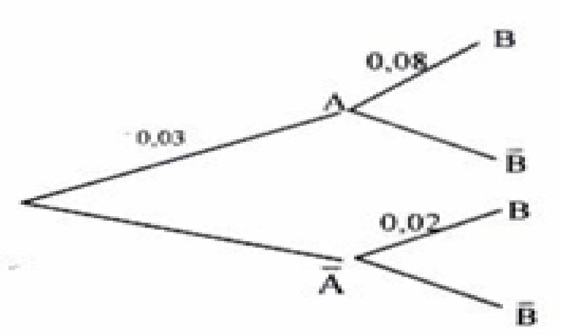
- 3% des climatiseurs présentent le défaut a.
- Parmi les climatiseurs présentant le défaut a ,8% présentent le défaut b.
- Parmi les climatiseurs ne présentant pas le défaut a ,2% présentent le défaut b.

  On préléve au hazard un climatiseur dans la production. On désigne par A et B les événements suivants :

  A « Le climatiseur présente le défaut a »

  B « Le climatiseur présente le défaut b »

1) L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation.Recopier et completer cet arbre .
2) Pour cette question, on donnera les résultats à quatre chiffres après la virgule.
   a) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente à la fois les deux défauts a etb ?
   b) Quelle est la probabilité que le climatiseur présente le défaut b ?
   c) Quelle est la probabilité que le climatiseur ne présente auncun défaut ?



Exercice n°11 :

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités P(V), P_V (T) , $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'événement $V\cap T$.

2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3) a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

<u>Exercice n°13 :</u>

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

On rappelle que si A et B sont deux évènements d'un ensemble probabiliste, avec A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A est le réel noté $P_A(B)$.

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.

En Tunisie les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4 % des hommes et 5 % des femmes sont asthmatiques.

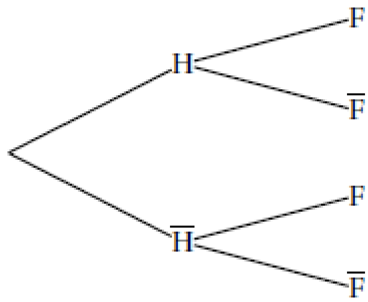
Dans la population Tunisienne, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

Partie A Étude de l'état d'asthme du couple

On note:

- H l'évènement : « L'homme est asthmatique »,
- F l'évènement : « La femme est asthmatique ».

On admet que les évènements H et F sont indépendants.



1) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.
2) On note les évènements:
   - A : «Aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique»
   - B : « Un seul des deux adultes du couple est asthmatique»
   - C : «Les deux adultes du couple sont asthmatiques »

Montrer que: P(A) = 0,912 ; P(B) = 0,086 ; P(C) = 0,002.

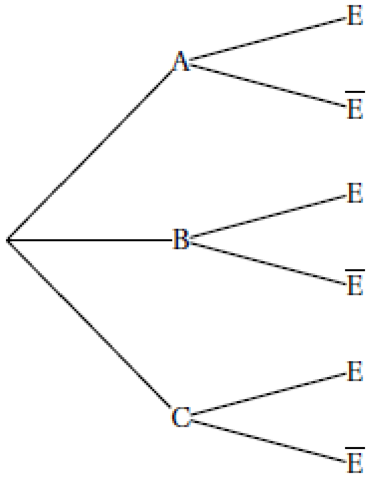
Partie B

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'évènement : « Le premier enfant du couple est asthmatique »

1) Reproduire sur votre copie puis compléter l'arbre de probabilités ci-contre.



2) Montrer que P(E) = 0,118.

3) Calculer $P_E(A)$ et interpréter le résultat.

Déduire $P_E(\overline{A})$ et interpréter le résultat.

4)Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatiques ?

(Indication : on pourra chercher à calculer l'évènement contraire)

Exercice n°14 :

Le nombre des postes vendus dans un magasin au cours d'une semaine définit un aléa numérique X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X_i	0	1	2	3	4	5
P_i	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

1) Calculer l'espérance mathématique de X.
2) Le bénéfice réalisé pour la vente d'un poste est 80 Dt. On désigne par Y l'aléa numérique donnant le bénéfice réalisé par le magasin, pendant une semaine, pour la vente de postes de télévision.
   a) Donner la loi de probabilité de Y.
   b) Quel est le bénéfice moyen réalisé par le magasin pour la vente de postes de télévision pendant une semaine ?
3) Tous le postes de télévision sont garantis pour deux ans. La probabilité pour qu'un poste de télévision n'ait pas de panne pendant la période de garantie est 0,9.Calculer la probabilité qu'un seul poste tombe en panne pendant la période garantie.