Lycée Mahmoud Elmesaadi ELFAHS	**DEVOIR DE SYNTHESE N°2**	Prof : BenHMIDENE Tarak
A.S 2013-2014 Le 4-3-2014	**MATHEMATIQUES**	4éme math Durée : 4 h

EXERCICE N°1(3points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1) $\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

2) Soit f la fonction définie sur$[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ alors $f^{-1}(x) = \ln(1 - e^x)$

3) Soit (E) une ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{e^2} = 1$ alors S (3 , 0) est un sommet de l'axe non focale

EXERCICE N°2(6points)

Dans la figure ci-joint ABCD et AIJK deux carrés orientés dans le sens direct $I = A * D$

$O = A * C$

1) Soit S la similitude directe tels que S(K)= D et S(J)= C

a) Déterminer le rapport et une mesure de l' angle de S .

b) Montrer que A est le centre de S et en déduire S (I)

2) Soit R une rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et h = S o R

a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport

b) Déterminer h (C)

c) Soit Ω le centre de h montrer que $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$ puis construire Ω

3) La perpendiculaire à (DΩ) en D coupe (AJ) en E

Préciser l'image de la droite (AC) par R et en déduire que R(Ω) =E

4) Déterminer alors S (E)

5) Soit σ la similitude indirecte qui transforme I en D et J en C

a) Donner le rapport de σ

b) On pose $\varphi = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ \sigma$

préciser $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$

c) Montrer que $\varphi = S_{(AD)}$ et que $\sigma = h_{(A,2)} \circ S_{(AD)}$

EXERCICE N°3(4points)

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé et ($\mathcal{H}$) l'ensemble des points M (x , y)tel que

$x^2 - 9y^2 - 2x - 36y - 44 = 0$

1)a)Montrer que ($\mathcal{H}$) est une hyperbole de centre Ω (1 , -2)

b) Déterminer les coordonnées des sommets S et S' , des foyers F et F' et les équations des asymptotes Δ et Δ'

c)Tracer ($\mathcal{H}$)

2) Soit A (-4 , $-\frac{2}{3}$)

a)Montrer que A ∈ ($\mathcal{H}$)

b) Déterminer l'équation de la tangente à ($\mathcal{H}$) en A

3) Soient (C) et (C') deux cercles de centres respectifs Ω et F et de rayons respectifs 3 et 1

(C) et (C')se coupent en H et H'

Montrer que les triangles Ω H F et Ω H' F sont des triangles rectangles en H et H'

EXERCICE N°4(7points)

I°)Soit g : $]0,+\infty[\to$ IR ; $x \mapsto 1-x-x^2-\ln x$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

b) Etudier le sens de variation de g

2) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α et que

$0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

3)Donner le signe de g(x) selon les valeurs de x

II°) Soit f : $]0+\infty[\to \mathrm{IR}$, $f(x) = x + \frac{(x-1)\ln x}{x}$ et (Cf)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement

2). a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite D : y=x est une direction asymptotique

c) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à D

3). a) Calculer f '(x) pour x>0 et vérifier que $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$

b) Montrer que f '(x)<0 pour $x < \alpha$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Montrer que la droite D: y=x est une tangente à Cf au point d'abscisse $x_0 = 1$

4). Montrer que $f(\alpha) = 2 + \alpha - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$ ***et que*** $0{,}64 < f(\alpha) < 1{,}06$

5). Tracer Cf et D

6). Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]0, \alpha]$

a) Montrer que h est une bijection de $]0, \alpha]$ ***sur un intervalle J que l'on précisera***

b) Tracer la courbe $C_{h^{-1}}$ ***dans le même repère*** $(o, \vec{i}, \vec{j})$

BON TRAVAIL

Figure(EXERCICE N °2)