Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série n°10 :** **Fonction Logarithme**	$4^{ème}$ Info **Tél :27509639**

Exercice n°1 :

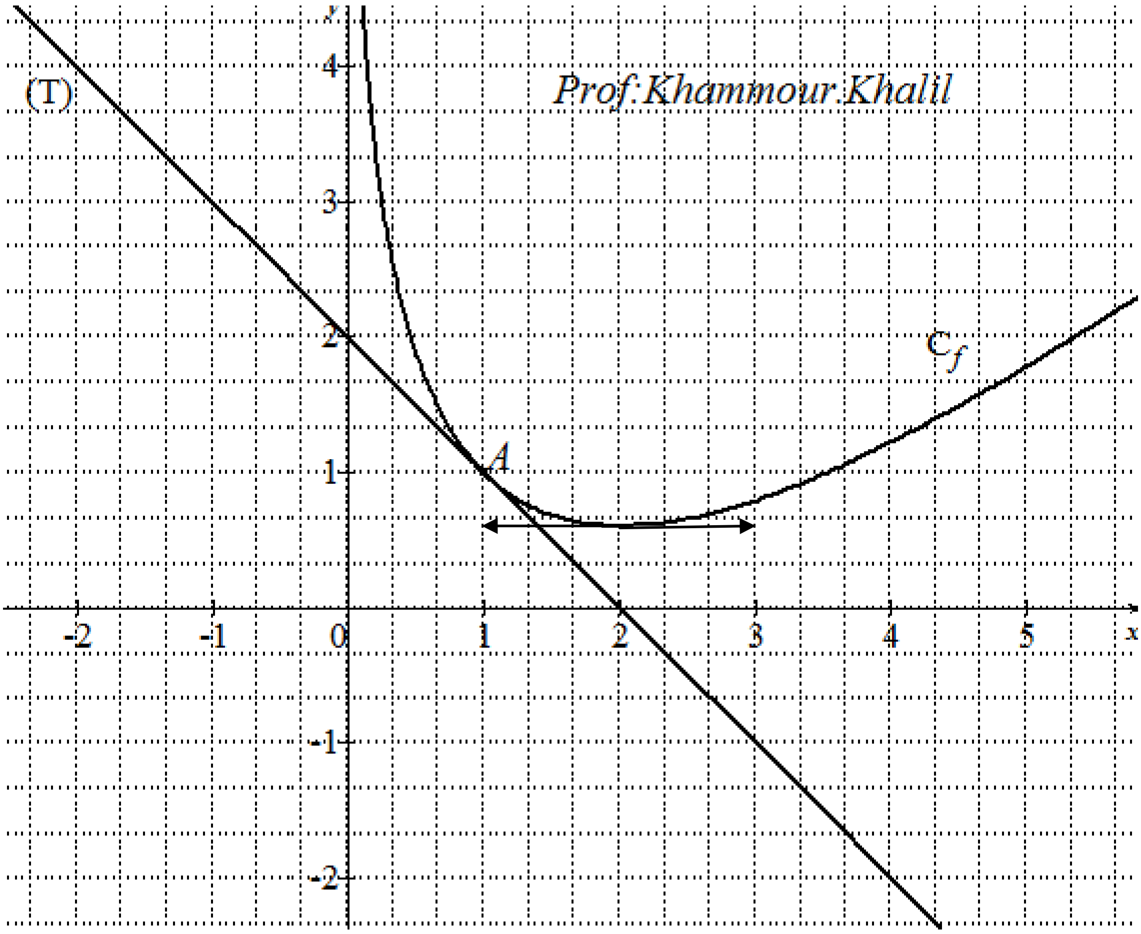
Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{Ln^3 x}{x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\ln x}$ 3) $\lim_{x\to 3} \frac{\ln x-\ln 3}{x-3}$ 4) $\lim_{x\to e} \frac{\ln x-\ln e}{x-e}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$ 6) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ 7) $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$ 8) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

Exercice n°2 :

On considère la fonction f définie sur$]0,+\infty[$ dont on donne la représentation graphique C_f dans le repère ci-dessous.



On admet que :

- Le point A de coordonnées (1 ;1) appartient à la courbe C_f.
- La tangente (T) en A à la courbe C_f passe par le point de coordonnées (2 ;0).
- La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.
- L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction f.

Partie A :

1) Donner ,par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de f (1) , f '(1) et f '(2) ,où f ' est la dérivée de f sur]0,+∞[.
2) On admet que l'expression de f (x) sur]0,+∞[est : $f(x) = ax + b + c\ln x$ où a ,b et c sont des nombres réels.
   a) Calculer f '(x) en fonction de x et de a, b et c.
   b) Démontrer que les réels a ,b et c vérifient le système : $\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=-1 \\ 2a+c=0 \end{cases}$
   c) Déduire de la question précédente les valeurs de a ,b et c, puis l'expression de f (x).

Dans cette partie ,on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à]0,+∞[par : $f(x) = x - 2\ln x$

Partie B :

1) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f .
2) Soit F la fonction définie pour tout réel x∈]0,+∞[par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2x\ln x$
   a) Montrer que F est une primitive de la fonction f sur]0,+∞[.
   b) Calculer F(1).

Exercice n°3 :

A) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln x$
1) Déterminer le tableau de variation de g.
2) En déduire que pour tout x∈]0,+∞[, $g(x) \geq 1$.

B) On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.
   b)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2) a) Montrer que pour tout x∈]0,+∞[, f '(x)= $2(g(x) - 1)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer C

Exercice n°4 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0,+∞[par : $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2) En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle]0,+∞[on a :
   $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$,déterminer la limite de f en +∞ et interpréter graphiquement le résultat.
3) a) Calculer f '(x) pour tout x appartenant à]0,+∞[.
   b)Etudier le signe de $-2 + \ln x$ sur]0,+∞[.En déduire le signe de f '(x) sur]0,+∞[.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
4) On note le point I le point d'intersection entre la courbe (C) et l'axe des abscisses, déterminer les coordonnées de point I.
5) On note (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.Déterminer une équation de (T).
6) Tracer la courbe (C) et la tangente (T) .
7) On considère la fonction g définie sur l'intervalle]0,+∞[par :$g(x) = (\ln x)^2$.
   a) Calculer g '(x) pour tout x∈]0,+∞[.
   b) En déduire une primitive de la fonction $\frac{\ln x}{x}$ sur]0,+∞[.

<u>Exercice n°5 :</u>

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$.
   a) Déterminer $\lim_{x \to -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de g .
   c) Calculer g (0).En déduire le signe de g (x) sur l'intervalle]-1,+∞[.
2) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Montrer que la droite Δ d'équation y=-x est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de+∞
   b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Δ.
   c) Tracer la courbe (C_f).
4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$h(x) = [\ln(x + 1)]^2$.
   a) Calculer h '(x).
   b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle]-1,+∞[.