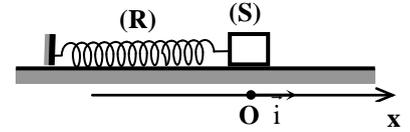


Oscillations mécaniques forcées

**Exercice n° : 1**

**A/** Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur  $K=20N.m^{-1}$  dont l'une de ses extrémités est fixe et à l'autre est accroché un solide ponctuel (S) de masse  $m=50g$ . La position de (S) est repérée par son abscisse  $OS=x$  dans le repère  $(o,i)$  porté par l'axe du ressort et dirigé dans le sens de l'allongement, O étant la position d'équilibre de (S). Pendant le mouvement le solide n'est soumis à aucune force de frottement.



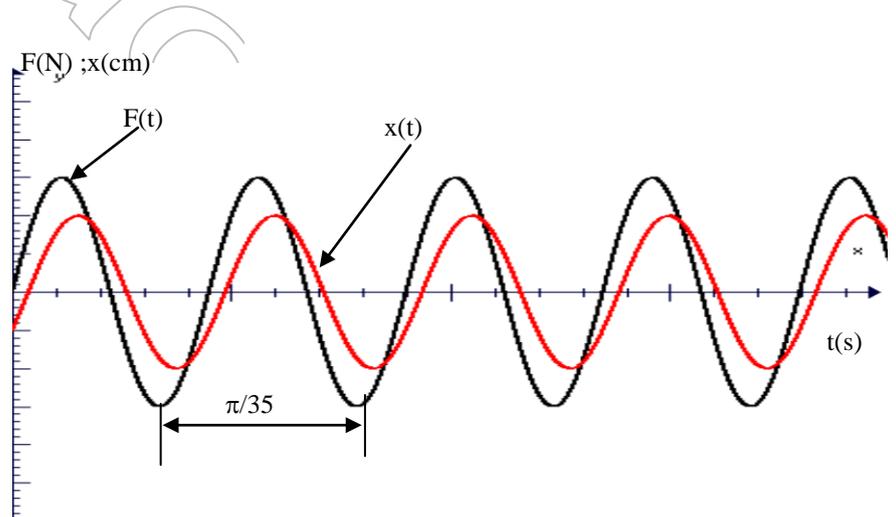
A la date  $t=0$ , on écarte le solide (S) de sa position d'équilibre de  $x_0=2,5\text{ cm}$  à partir de O, dans le sens positif puis on le lance avec une vitesse initiale  $v_0= 0,866m.s^{-1}$  dans le sens des élongations décroissantes. Le solide S effectue alors des d'oscillations d'amplitude constante, avec une période propre  $T_0$  de l'oscillateur.

- 1) a- Donner l'analogie électrique de l'oscillateur mécanique libre non amorti considéré.
  - b- Etablir l'équation différentielle des oscillations du solide (S). En déduire par analogie l'équation différentielle régissant les oscillations de la charge q.
  - 2) Déterminer l'amplitude et la phase initiale de l'élongation  $x(t)$ . Déduire les expressions de  $x(t)$  et de  $v(t)$
  - 3) Montrer que l'énergie mécanique totale E du pendule élastique est constante. Calculer sa valeur.
- B)** On excite le pendule élastique précédent, le solide (S) est soumis à une force de frottement  $f= - 0,2.v$  par une force excitatrice  $F= F_m \sin \omega t$ . Le solide (S) est alors animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de même pulsation  $\omega=16\text{ rad.s}^{-1}$  que la force excitatrice et d'élongation  $x(t)=X_m \sin(\omega t+\varphi)$ .

- 1) a- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- a- Etablir, dans ces conditions, les expressions de  $X_m$  et  $\text{tg}\varphi$ .
- b- En déduire l'expression de l'amplitude  $V_m$  de la vitesse du solide (S).
- 2) Rappeler l'expression de l'impédance électrique de de l'oscillateur forcé RLC puis exprimer par analogie de l'impédance mécanique  $Z_{\text{méc}}$  du pendule élastique.
- 3) On donne  $X_m=4\text{cm}$  et  $\omega=16\text{rad.s}^{-1}$ . Calculer  $V_m$ ;  $F_m$ ;  $\varphi$ ;  $Z_{\text{méc}}$ .

**Exercice n°2**

un oscillateur mécanique est formé d'un solide (S) de masse  $m=50g$  attaché à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K, l'autre extrémité est fixe. on suppose que le solide est soumis à une force de frottement visqueux de la forme  $f=-hv$  ou h est une constante positive. les oscillations de (S) sont entretenues à l'aide d'une force supplémentaire  $F=F_m \sin(\omega t)$  exercée à l'aide d'un dispositif approprié jouant le rôle d'excitateur.



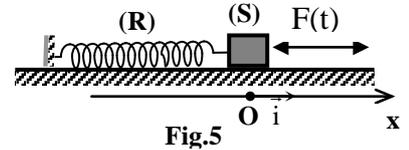
1-/ Montrer qu'à tout instant t au cours du mouvement, l'élongation x de G, sa vitesse instantanée  $v=dx/dt$  et son

accélération  $a=d^2x/dt^2$  vérifient la relation :  $m d^2x/dt^2+h dx/dt+Kx= F_m \sin(\omega t)$  dont la solution est  $x(t)=X_m \sin(\omega t+\varphi)$ . Les fonctions  $x(t)$  et  $F(t)$  sont représentées par les diagrammes de la figure ci-dessus.

- 2) A partir des diagrammes de la figure ci-dessus.
  - a) Déterminer les expressions de  $x(t)$  et  $F(t)$ . Préciser, en le justifiant, s'il existe des valeurs de la pulsation  $\omega$  de la force excitatrice pour lesquelles le déphasage de  $x(t)$  par rapport à  $F(t)$  change de signe.
  - b) Faire la construction de Fresnel, et en déduire les valeurs de h et de K. Ech :  $1\text{ N} \longrightarrow 1\text{ cm}$
- 3)a) Donner l'expression de l'amplitude  $X_m$  en fonction de  $F_m$ , h,  $\omega$ , K et m. Déduire l'expression de l'amplitude de  $V_m$  de la vitesse instantanée en fonction des mêmes données.
- b) Déterminer le rapport  $F_m/ V_m$  en fonction de h,  $\omega$ , K, et m. Déduire à l'aide de l'analogie mécanique électrique, l'expression correspondant à ce rapport en électricité et en donner signification physique.
- 4) Dans le cas où les frottements sont négligeables, donner les valeurs possibles du déphasage de  $f(t)$  par rapport à  $x(t)$ .

**Exercice n°3**

Un solide (S) de centre d'inertie G, de masse  $M = 200\text{g}$  et pouvant glisser sur un plan horizontal, est relié à l'extrémité d'un ressort horizontal (R) de masse négligeable, de raideur  $k$  et dont l'autre extrémité est fixe. Lorsque (S) est dans sa position d'équilibre, G occupe l'origine du repère  $(O, \vec{i})$  d'axe Ox horizontal (figure 5). Un excitateur approprié exerce sur le solide (S) une force  $\vec{F} = F_m \sin \omega t \vec{i}$  où l'amplitude  $F_m$  est constante et la pulsation  $\omega$  est réglable. (S) est introduit dans un liquide amortisseur où il subit une force de frottement visqueux  $\vec{f} = -h\vec{v}$  avec  $h$  est un coefficient positif et  $\vec{v}$  est la vitesse de G. En régime permanent l'équation horaire du mouvement de G est de la forme  $x(t) = X_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ .



1- Donner l'unité internationale du coefficient de frottement  $h$ .

2-a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation  $x$  de G.

b) Faire la construction de Fresnel relative à l'équation différentielle du mouvement de G.

c) Déduire que l'oscillateur est en résonance qu'on précisera la nature.

d) Montrer que, dans ces conditions, la force de frottement  $\vec{f}$  est opposée à la force excitatrice  $\vec{F}$ .

e) Prouver que, dans ces conditions, l'énergie mécanique du système {(S),(R)} se conserve.

4- A l'aide d'un dispositif approprié on mesure pour différentes valeurs de  $\omega$ , l'amplitude  $X_m$  des oscillations de G et l'amplitude  $V_m$  de la vitesse de passage de ce point par la position O. Les résultats des mesures ont permis de tracer les courbes  $X_m(\omega)$  et  $V_m(\omega)$  de la figure 6.

a) Identifier en le justifiant, la courbe qui correspond à  $X_m(\omega)$ .

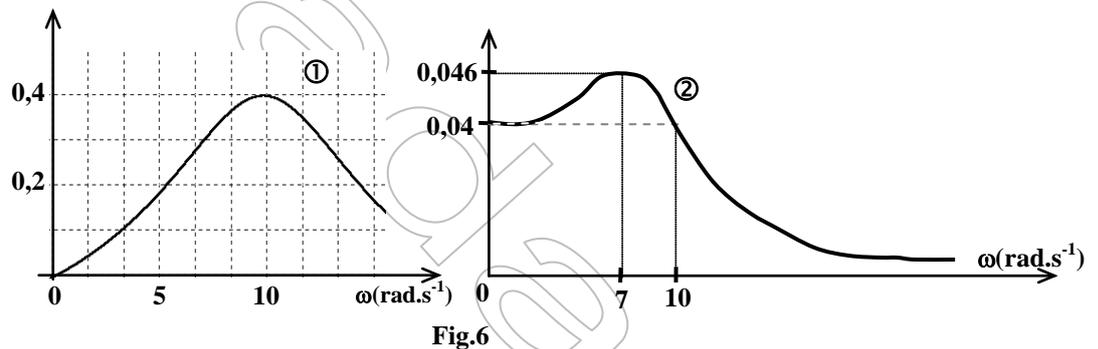
b) Lire la valeur  $\omega_1$  de la pulsation propre du résonateur et déduire la valeur de  $k$ .

c) Lire la valeur  $\omega_2$  de la pulsation  $\omega$  à la résonance d'élongation et déduire la valeur de  $h$ .

d) Déterminer la valeur de  $F_m$ .

e) Montrer que dans le cas où  $\omega = \omega_1$ , la puissance moyenne consommée par le résonateur est maximale.

5) On change le liquide amortisseur ; on constate qu'on n'obtient plus le phénomène de résonance d'élongation. Interpréter ce résultat.



#### Exercice 4

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse  $m = 0,2 \text{ Kg}$  attaché à l'extrémité d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de raideur  $K$ , l'autre extrémité du ressort est fixe. Le pendule repose sur un plan horizontal (figure 1) et la position du centre d'inertie G du solide est repérée sur un axe horizontal  $(O, \vec{i})$ , d'origine O position d'équilibre du solide. Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux  $f = -hv$  ( $h = 1,5 \text{ Kg.s}^{-1}$ ). Un dispositif approprié exerce sur (S) une force excitatrice  $F = F_m \sin(\omega t) \cdot \vec{i}$ , d'amplitude  $F_m$  constante et de pulsation  $\omega$  réglable.

1) Comment peut-on montrer expérimentalement que les oscillations du solide (S) sont forcées ?

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3) La solution de l'équation différentielle précédente est  $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$

a- Faire la construction de Fresnel dans le cas où  $\omega < \omega_0$  ( $\omega_0$  pulsation propre de l'oscillateur).

b- Déduire l'expression de l'amplitude  $X_m$  en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $h$ ,  $\omega$  et  $F_m$  ainsi que celle de  $\tan \varphi$ .

4) Expliquer brièvement la résonance d'élongation et donner l'expression de la pulsation  $\omega_r$  correspondante en fonction de  $\omega_0$ ,  $h$  et  $m$ .

5) a- Donner l'expression de l'amplitude  $I_m$  de l'intensité du courant  $i(t)$  traversant un circuit RLC en régime sinusoïdal forcé en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $\omega$ ,  $C$  et  $U_m$ .

b- Déduire, en précisant l'analogie utilisée, l'expression de l'amplitude  $V_m$  de la vitesse du solide (S) en fonction de  $h$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $F_m$ .

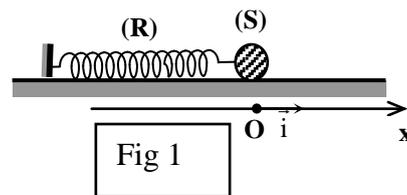
c- Montrer que l'impédance mécanique s'écrit sous la forme  $Z_{\text{méc}} = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$ .

6- Pour une valeur  $\omega_1 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$  de la pulsation de l'excitateur, l'impédance mécanique est minimale et égale à  $h$  alors que l'amplitude  $X_m$  a pris la valeur 8 cm.

- a- Montrer que le pendule élastique est à la résonance de vitesse. Calculer K et  $F_m$ .
- b- Déduire la valeur de  $\varphi$  dans ces conditions.
- c- Tracer l'allure de la courbe représentant  $Z_{méc} = f(\omega)$  en précisant le point correspondant à  $(Z_{méc})_{min}$

### Exercice 5

Un pendule élastique est constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K, et d'un solide (S) supposé ponctuel de masse m. Le solide (S) peut se déplacer sans frottement sur un



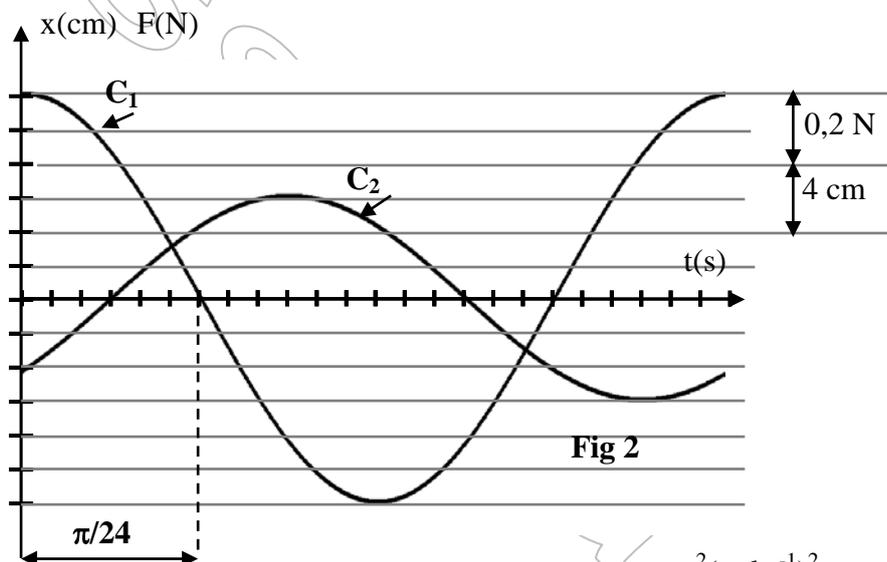
plan horizontal. Sa position est repérée par son abscisse x dans le repère  $(O, \vec{i})$  avec O la position d'équilibre de (S) (**fig 1**). On soumet (S) à une force

excitatrice  $\vec{F} = F \cdot \vec{i} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F) \vec{i}$  et à une force de frottement  $\vec{f} = -h \vec{v}$  avec  $\vec{v}$  la vitesse de (S) et h une constante positive.

1- Etablir l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation x.

Pour une certaine valeur  $h_1$  de h et une valeur  $\omega_1$  de  $\omega$ , on obtient les courbes de variations de F et de x en fonction de temps (**fig 2**).

- a- Montrer que la courbe  $C_1$  correspond à F(t).
- b- Déterminer la valeur de  $\omega_1$ ,  $F_m$ ,  $X_m$ , et  $\varphi_F - \varphi_x$ .
- c- Quelle est la valeur de  $\varphi_F$ ? Déduire celle de  $\varphi_x$ .
- d- Faire la construction de Fresnel correspondante. Déduire les expressions de  $X_m$  et de  $\sin(\varphi_F - \varphi_x)$ . Calculer  $h_1$ .



2- Pour une certaine valeur  $\omega_r$  de  $\omega$ , on constate que  $X_m$  prend sa valeur la plus élevée.

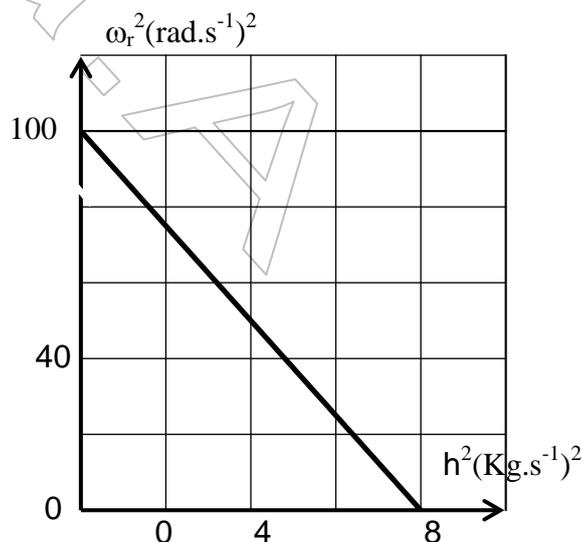
- a- Dans quel état se trouve l'oscillateur ?
- b- On donne la courbe de variation de  $\omega_r^2$  en fonction de  $h^2$  (fig 3) ainsi que l'expression de

$$\omega_r = \sqrt{-\frac{h^2}{2m^2} + \frac{K}{m}}$$

Déterminer K et m.

3- En précisant l'analogie utilisée donner:

- a- Le schéma du montage du circuit électrique analogue à l'oscillateur mécanique précédent.
- b- L'expression de la charge maximale  $Q_m$  du condensateur.
- c- L'expression de la pulsation  $\omega_r$  correspondant à la valeur la plus élevée de  $Q_m$ .



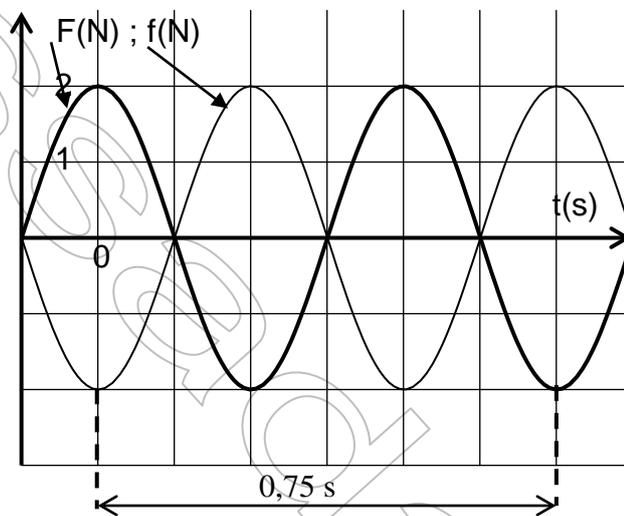
### Exercice 6

Un pendule élastique horizontal est formé :

- d'un solide (S) de centre d'inertie G et de masse  $m = 0,4 \text{ Kg}$ .
- d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K.

Le pendule repose sur un plan horizontal (figure 1) et la position du centre d'inertie G du solide est repérée sur un axe horizontal  $(O, \vec{i})$ , d'origine O position d'équilibre du solide. Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux  $\vec{f} = -h\vec{v}$  ( $h = \text{une constante positive}$ ). On soumet le solide (S) à une force excitatrice  $\vec{F} = F_m \sin(\omega t) \vec{i}$ , d'amplitude  $F_m$  constante et de pulsation  $\omega$  réglable. À un instant de date t, on notera x l'abscisse de G relative au repère  $(O, \vec{i})$ . On donne l'équation différentielle du mouvement du solide (S).

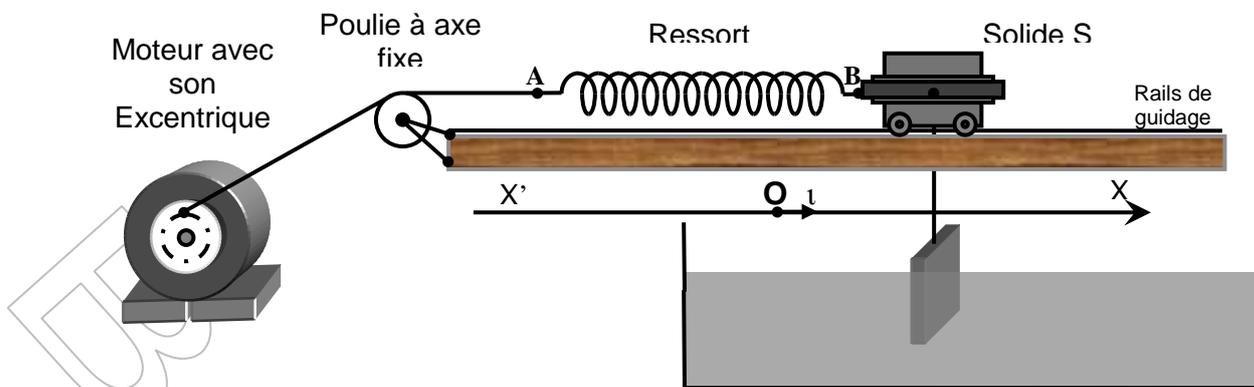
- 1- établir l'équation différentielle du mouvement régissant les variations de  $x(t)$ .
- 2- la solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme  $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$  donner l'expression de l'amplitude  $X_m$  en fonction de  $F_m$ ,  $h$ ,  $K$ ,  $\omega$  et  $m$ .
- 3- pour une valeur  $\omega_1 = 12 \text{ rad.s}^{-1}$  de la pulsation, on constate que l'amplitude des oscillations  $X_m$  est maximale. Donner l'expression de  $\omega_1$  en fonction de  $K$ ,  $m$  et  $h$ .
- 4- pour une valeur  $\omega_2$  de la pulsation, on donne les courbes de variation de  $F(t)$  et de  $f(t)$ .



- a- Montrer que  $F(t) + f(t) = 0$ .
- b- Dédire que l'oscillateur se comporte comme un oscillateur libre non amorti.
- c- L'oscillateur est le siège d'une résonance dont on précisera la nature. Calculer la valeur de  $\omega_2$ .
- d- Trouver la valeur de  $K$  et de  $h$ .
- e- Calculer l'énergie totale du système = {solide + ressort}.

### Exercice 7

Un chariot de masse  $m = 100 \text{ g}$  accroché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur  $k = 40 \text{ Nm}^{-1}$  roule sur deux rails horizontaux. Sur ce chariot on peut fixer une tige, liée à une plaque qui plonge dans un fluide visqueux. Le liquide visqueux exerce par l'intermédiaire de la tige et de la plaque sur le chariot au cours de son mouvement, une force de frottement  $\phi = -h.v$ . Avec  $h$  une constante positive et  $v$  la vitesse du solide. L'autre extrémité du ressort est liée à l'excentrique d'un moteur par l'intermédiaire d'un fil inextensible qui passe dans la gorge d'une poulie à axe fixe et de masse négligeable. Voir le schéma ci-dessous. L'ensemble (moteur + excentrique + fil + ressort) transmet au solide S une force excitatrice  $\Phi = F_i$ . Avec  $F = F_{\text{Max}} \sin(\omega_e t)$ . On supposera que la masse de la tige et la masse de la plaque sont négligées devant la masse du solide S.



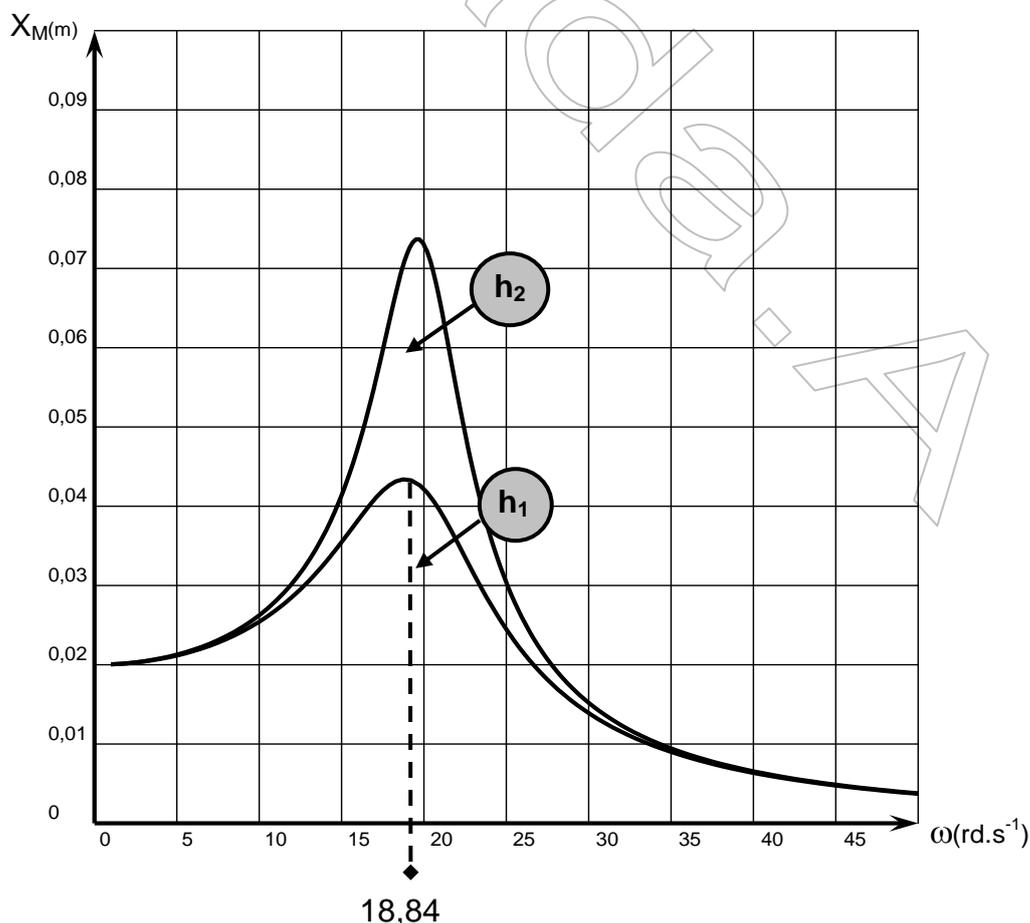
**A/** Dans un premier temps, on décroche la tige et la plaque du solide S, et on négligera tout type de frottement.

- 1- Faire un bilan des forces qui s'exercent sur le solide S et en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$ .
- 2- Faire une construction de Fresnel pour  $\omega_e > \omega_0$  et pour  $\omega_e < \omega_0$ , et indiquer pour chacun des cas le déphasage entre  $F(t)$  et  $x(t)$ .

**B/** On accroche la tige et la plaque au solide S.  $F_{Max}$  garde toujours la même valeur.

- 1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $x(t) = X_{Max} \sin(\omega_e t + \phi_x)$ .
- 2- Etablir l'expression de l'amplitude  $X_{Max}$  en fonction de  $F_{Max}$ ,  $\omega_e$ ,  $m$ ,  $k$  et  $h$ .
- 3- Montrer que l'amplitude  $X_{Max}$  est maximale pour une valeur particulière de  $\omega_e$ , que l'on notera  $\omega_R$ . Exprimer  $\omega_R$  en fonction de  $k$ ,  $m$ , et  $h$ .

**C /** Une étude expérimentale a permis de tracer la courbe  $X_{Max}$  en fonction de la pulsation de l'excitateur pour deux valeurs de  $h$  notées  $h_1$  et  $h_2$ . Voir les courbes ci-dessous.



- 1- Calculer les limites suivantes de la fonction  $X_{Max} = f(\omega_e)$ .

- $\lim_{(\omega_e \rightarrow 0)} X_{Max} =$
- $\lim_{(\omega_e \rightarrow +\infty)} X_{Max} =$

- 2- Déterminer la valeur de  $h_1$ . Comparer les valeurs de  $h_1$  et  $h_2$ . Justifier.
- 3- Déterminer la valeur de  $F_{Max}$ .
- 4- On fixe la valeur de la pulsation  $\omega_e = 22,5 \text{ rd.s}^{-1}$  et  $h_2 = 0,3 \text{ kg.s}^{-1}$ . Déterminer l'expression instantanée de  $x(t)$ .
- 5- Calculer la puissance mécanique moyenne reçue par le système solide-ressort.
- 6- Montrer que l'énergie mécanique  $E_M$  du système {Solide, Ressort, Terre} est constante pour une valeur de  $\omega_e$  que l'on précisera. Calculer  $E_M$  avec  $h = h_2$ . On prendra comme référence de énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = 0$  Au niveau du plan horizontal passant par le centre d'inertie du solide S au cours de son mouvement.
- 7- Dresser un tableau des analogies électromécaniques et en déduire l'expression de la grandeur analogue à l'amplitude  $X_{Max}$  établie dans la question B/3-.
- 8- Faire le schéma du circuit R,L,C série et indiquer les branchements du matériel nécessaire ainsi que les mesures à effectuer pour étudier le phénomène de résonance de cette grandeur.

### Exercice 8

Un pendule élastique est constitué d'un ressort de raideur  $K$  et un solide de masse  $m = 50\text{g}$ . On suppose que le solide est soumis à une force de frottement  $\vec{f} = -h\vec{v}$  ou ( $h$ ) est une constante positive. Les oscillations du solide sont entretenues à l'aide d'une force supplémentaire  $\vec{F} = F(t)\vec{i} = F_M \sin(\omega_e t + \varphi_F)\vec{i}$  exercée à l'aide d'un dispositif approprié jouant le rôle d'excitateur.

1°/ Déterminer l'équation différentielle liant :

$$x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, m, K, h \text{ et } F.$$

2°/ Préciser dans quel sens s'effectue l'échange d'énergie entre le résonateur et l'excitateur et pourquoi ?

3°/ Les fonctions  $x(t)$  et  $F(t)$  sont représentées par les courbes suivantes : A partir des diagrammes

a- Déterminer les expressions de  $x(t)$  et  $F(t)$ .

b- Préciser, en le justifiant, s'il existe des valeurs de la pulsation  $w$  de la force excitatrice pour lesquelles le déphasage de  $x(t)$  par rapport à  $F(t)$  change de signe.

c- Faire la construction de Fresnel et en déduire les valeurs de  $h$  et  $K$ .

4/ Donner l'expression de l'amplitude  $X_M$  en fonction de  $F_M, h, w, K$  et  $m$ .

En déduire l'expression de  $V_M$ : amplitude de la vitesse instantanée.

5°/ Déterminer  $X_M$  et  $V_M$  à la résonance.

6°/ Déterminer le rapport  $F_M/V_M$  en fonction de  $h, w, K$  et  $m$ .

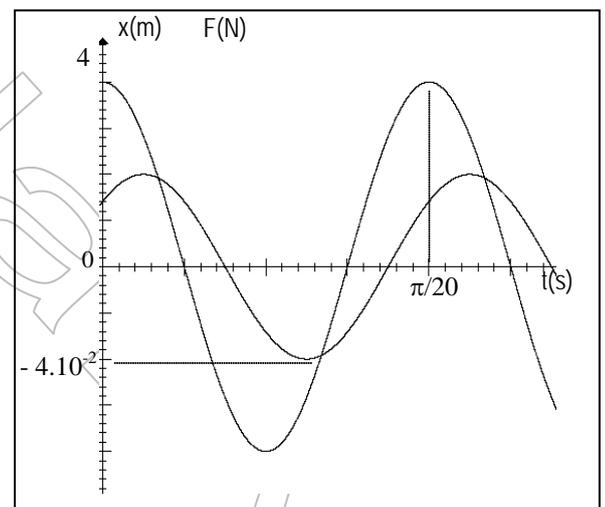
Déduire, à l'aide de l'analogie mécanique-électrique, l'expression correspondant à ce rapport et en donner la signification physique.

### Exercice 9

Un solide (S) de masse  $M = 98\text{g}$  et de centre d'inertie  $G$  est soudé à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical (R), de masse négligeable, de raideur  $k = 20\text{N.m}^{-1}$  et dont l'extrémité supérieure est fixe. Lorsque le solide (S) est dans sa position d'équilibre,  $G$  occupe le point  $O$ , origine du repère ( $O, \vec{i}$ ) d'axe  $Ox$  vertical dirigé vers le bas.

Un excitateur approprié exerce sur le solide (S) une force  $\vec{F} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)\vec{i}$  où  $F_m = 1,29\text{N}$ ,  $\varphi_F = -\frac{\pi}{2}$  et la

pulsation  $\omega$  est réglable. (S) subit une force de frottement visqueux  $\vec{f} = -h\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse de  $G$  et  $h$  un coefficient positif que l'on peut modifier. En régime permanent, l'équation horaire du mouvement de  $G$  est de type  $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$ .



1°/Au cours des oscillations forcées, il y a échange d'énergie entre l'oscillateur et l'excitateur. Préciser dans quel sens s'effectue-t-il.

2°/Etablir l'équation différentielle du mouvement de G.

3°/a-On ajuste la pulsation  $\omega$  et le coefficient  $h$  respectivement aux valeurs  $20\text{rad.s}^{-1}$  et  $1,8\text{kg.s}^{-1}$ . Déterminer par la construction de Fresnel les expressions de  $X_m$  et de  $\text{tg}\Delta\varphi$  avec

$\Delta\varphi = \varphi + \pi/2$ . Calculer  $X_m$  et  $\varphi$ .

b-Ecrire l'équation horaire du mouvement de G.

4°/a-Montrer que l'oscillateur entre en résonance d'élongation pour une pulsation  $\omega_r$  que l'on déterminera.

b-Montrer qu'il existe un coefficient de frottement  $h_1$  au-delà duquel la résonance d'élongation ne se produit plus. Exprimer  $h_1$  en fonction de  $M$  et  $k$ .

c-Montrer que l'amplitude  $X_{mr}$  à la résonance d'élongation est donnée par la relation :

$$X_{mr} = \frac{F_m}{h\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4M^2}}}$$

d-Représenter l'allure de la courbe  $X_m = f(\omega)$ , dans les cas suivants :

$h$  est nul. \*  $h$  est non nul mais faible. \*  $h$  est élevé mais inférieur à  $h_1$  \*  $h$  est supérieur à  $h_1$ .

5°/Déterminer lorsque la pulsation  $\omega$  varie entre une valeur très faible et une autre très élevée :

a-Le signe du déphasage  $\Delta\varphi$  entre l'élongation  $x$  et la force  $\vec{F}$ . Donner la signification physique du résultat

b-Les valeurs du déphasage  $\Delta\varphi$ .

c-Les valeurs du déphasage  $\varphi_v - \varphi_F$  entre la vitesse  $\vec{v}$  de G et la force excitatrice  $\vec{F}$ .

6°/La pulsation  $\omega$  et le coefficient  $h$  sont ajustés toujours respectivement aux valeurs  $20\text{rad.s}^{-1}$  et  $1,8\text{kg.s}^{-1}$ .

a-Le point de soudure A assurant la liaison entre le solide (S) et le ressort (R), ne peut pas supporter une tension de valeur supérieure à  $2,1\text{N}$ .

Indiquer, en le justifiant, si le risque de rupture de la soudure au point A a lieu en augmentant ou en diminuant  $\omega$ .

b-Déduire qu'il peut y avoir rupture de la soudure en A. On donne :  $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$

### Exercice 10

Un oscillateur mécanique horizontal (figure ci-contre) est constitué par un ressort élastique à spires non jointives de masse négligeable et de raideur  $k=40\text{N.m}^{-1}$  à l'extrémité duquel est accroché un solide (S) de masse  $m$ . Cet oscillateur est soumis d'une part à une

force de frottement visqueux  $\vec{f} = -h\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse du centre d'inertie G du solide du (S) et  $h$  un coefficient positif ; d'autre part à une force excitatrice

$\vec{F}(t) = Fm \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{i}$  exercée par un excitateur approprié. L'équation différentielle régissant les oscillations de l'élongation  $x(t)$  du centre d'inertie G du solide (S) est :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F$$

La solution générale de cette équation différentielle est  $x(t) = X_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_x)$ .

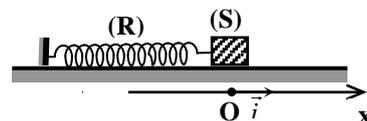
1°/ La valeur maximale  $X_m$  de l'élongation  $x(t)$ , est donnée par :  $\frac{Fm}{\sqrt{(h\omega)^2 + (m\omega^2 - K)^2}}$ . Montrer que l'amplitude

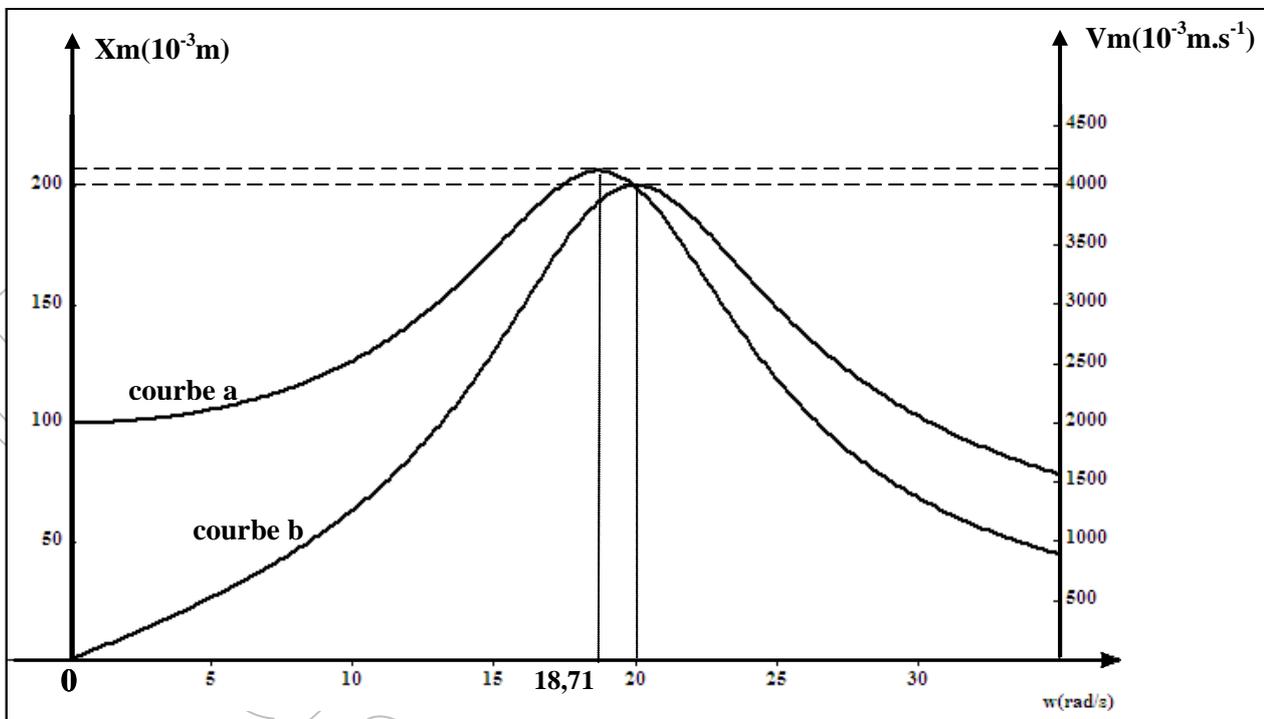
$X_m$ , prend une valeur maximale  $X_{m0}$  lorsque la pulsation de la force excitatrice prend une valeur  $\omega_r$  telle que

$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$  où  $\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur mécanique.

2°/ On mesure l'amplitude  $X_m$  pour différentes valeurs de la pulsation  $\omega$  de la force excitatrice.

A partir de ces mesures on trace la courbe  $X_m = f(\omega)$  et on en déduit la courbe qui traduit les variations de  $V_m = f(\omega)$  ou  $V_m$  est la valeur maximale de la vitesse instantanée  $v(t)$  du centre d'inertie G du solide (S). On obtient les courbes (a) et (b)





a- En justifiant la réponse, montrer que la courbe (a) correspond à l'évolution de  $X_m$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .

b- Expliquer comment peut-on déduire la courbe (b) à partir de la courbe (a).

3°/ Déterminer graphiquement la valeur de :

a- La pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur.

b- La pulsation  $\omega_r$  de résonance d'amplitude.

c- L'amplitude maximale  $X_{m0}$  à la résonance d'élongation.

d- La vitesse maximale  $V_{m0}$  du centre d'inertie G du solide (S) à la résonance de vitesse.

4°/ a- Montrer que la valeur maximale de la force excitatrice est  $F_m = 4N$ .

b- Déterminer la valeur du coefficient de frottement visqueux  $h$ .

c- Déterminer la masse  $m$  du solide (S).

5°/a- Calculer, à la résonance de vitesse, le coefficient  $Q = \frac{K \cdot X_m}{F_m}$ .

b- Donner par exploitation de l'analogie électrique mécanique, la signification physique de ce coefficient et nommer le.

6°/ a- Soient  $E$  l'énergie totale de l'oscillateur et  $v$  la vitesse instantanée du centre d'inertie G du solide (S), montrer que :  $\frac{dE}{dt} = A - B$  avec  $A = F \cdot v$  et  $B = h \cdot v^2$ .

b- Quelles sont les significations physique de  $A$ , de  $B$  et de  $\frac{dE}{dt}$ .

c- En déduire qu'à la résonance de vitesse, l'énergie  $E$  prend une valeur constante que l'on calculera.

7°/a- Montrer qu'à partir d'une certaine valeur de  $h$  la résonance d'élongation devient impossible.

b- Sur la même figure de la feuille...annexe représenter l'allure des courbes  $X_m = f(\omega)$  et  $V_m = f(\omega)$  si on augmente la valeur du coefficient de frottement  $h$ . (indiquer la courbe de  $X_m(\omega)$  et celle de  $V_m(\omega)$ ).

c- Pour quelle valeur de  $h$ , on a une résonance simultanée de vitesse et d'élongation ? Quelle est la conséquence sur le résonateur ?