Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série d'exercices :** **Intégrales**	4ème Sc-Exp **Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{6x+3}{(x^2+x+2)^2}\,dx.$
2) $\int_0^5 \frac{3}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$
3) $\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx.$
4) $\int_1^2 t(t+1)^3\,dt.$
5) $\int_{-1}^1 (2x+1)(x^2+x-5)\,dx.$
6) $\int_{-2}^1 |x(x+1)|\,dx.$
7) $\int_0^{\pi} cos^3x\,dx.$
8) $\int_0^2 \frac{dx}{(2+x)^2}\,dx.$
9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2x}\,dx.$
10) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2x}{cos^2x^2}\,dx.$
11) $\int_0^{\pi} \frac{2sinx}{(2+cosx)^3}\,dx.$
12) $\int_0^{\pi} \frac{sinx}{cos^2x}\,dx.$
13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2x\,dx.$
14) $\int_0^1 \mathrm{t}\sqrt{1-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt}.$

Exercice n°2 :

Soit la fonction f définie sur IR \ {-1} par : $f\,(x) = \frac{3x^2+6x+5}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a et b tels que : $f\,(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$ pour tout x ∈ IR\{-1}.
2) Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie sur IR \ {1} par : $f\,(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etudier f et tracer (C).

2) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$.

3) Soit $\lambda < \frac{1}{2}$, on pose $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) ,l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \frac{1}{2}$

   a) Déterminer $\mathscr{A}(\lambda)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

Exercice n°4 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par :$f(t) = \frac{t^2}{(t+1)^4}$ et φ la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

1) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on considère la fonction g définie par : $g(x) = \varphi(\frac{1}{x})$.

   a) Montrer que g dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a ,$g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^4}$.

   b) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

2) a) Déduire de tout ce qui précède une expression de $\varphi(x)$ en fonction de x.

   b)En déduire $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ et la valeur de $\varphi(0)$.

   c)Dresser le tableau de variation de φ.

3) Soit (I_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{(1+t)^4}\,dt$.

   a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ,en déduire qu'elle est convergente.

   b) Montrer que pour tout $n \geq 1, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$.En déduire la limite de I_n.

Exercice n°6 :

Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ $n \geq 1$.

1) Etablir que $1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$ pour tout $n \geq 1$.
2) Montrer que $0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.
3) En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°7 :

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = cosx$.

1) a) Calculer $f'(x)$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.
   b)Justifier que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur [0,1].
2) Soit g la fonction réciproque de f .
   a) Justifier que g dérivable sur [0,1[.
   b) Montrer que pour tout réel x de [0,1[; $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3) a) Calculer $g(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$.
   b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{6}$.

Exercice n°8 :

Soient f_0 et f_1 les fonctions définies sur [0,1] par $f_0(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $f_1(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1) On désigne C_0 et C_1 les courbes représentatives de f_0 et f_1 dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f_0 et f_1 .
   b) Etudier la position relative de C_0 et C_1.
   c) Construire C_0 et C_1.
2) On pose pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $F(x) = \int_0^{\sin(x)} f_0(t)dt$.
   a) Montrer que F dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$.
   b) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
   c) Vérifier $\int_0^1 f_0(t)dt = \frac{\pi}{4}$.
   d) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine limité par les courbes C_0 et C_1 et les droites d'équation x=0 et x=1 .Calculer $\mathscr{A}$.
3) On pose pour tout n de IN^* Soit $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et
   $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

a) Montrer que I_n est décroissante .En déduire que la suite I_n est convergente.

b) Démontrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 9 :

1) Dans le graphique (Voir Annexe), (C) et (C') sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction dérivable sur IR et d'une primitive F de f sur IR.

Par lecture graphique :

a) Vérifier que (C) est la courbe représentative de F.

b) Calculer l'aire de la partie limitée par (C') ,l'axe des abscisses et les droites x=0 et x=2.

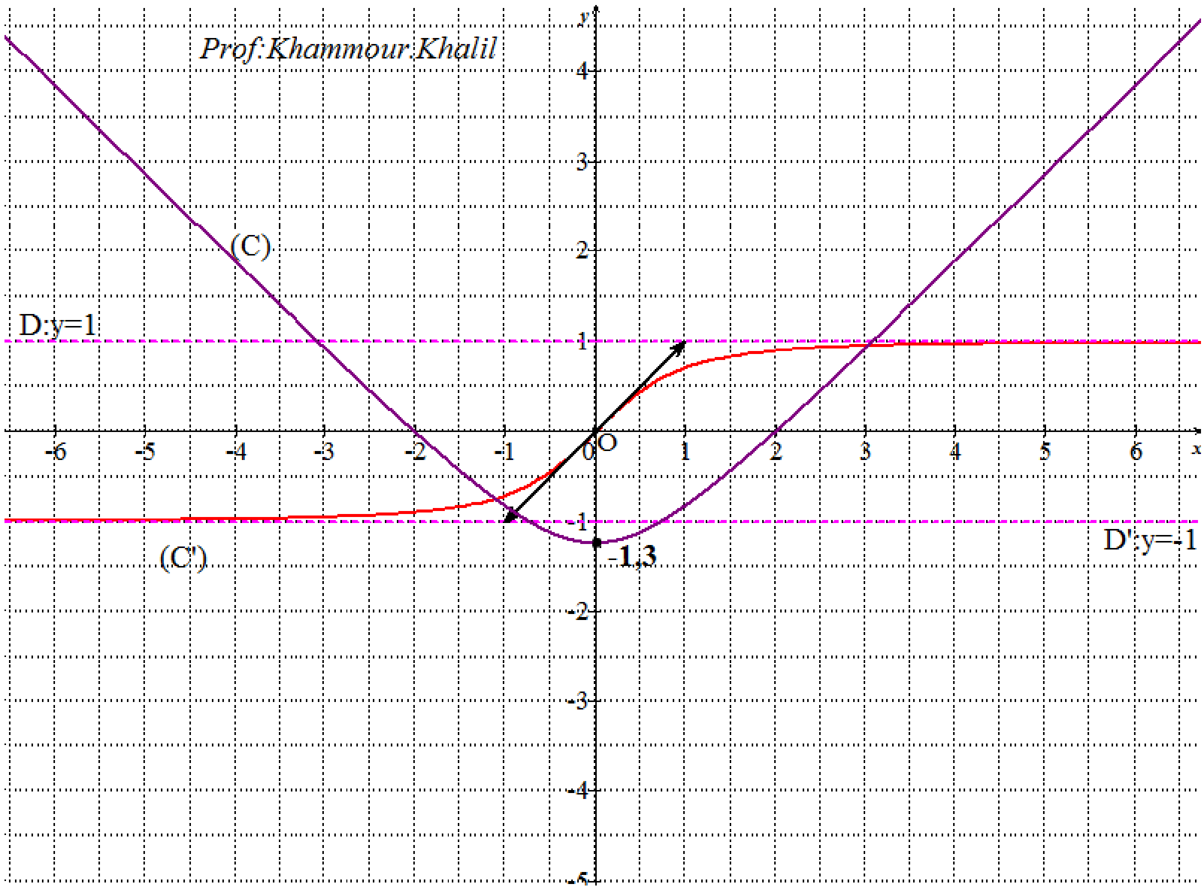
2) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C') au point O.

a) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

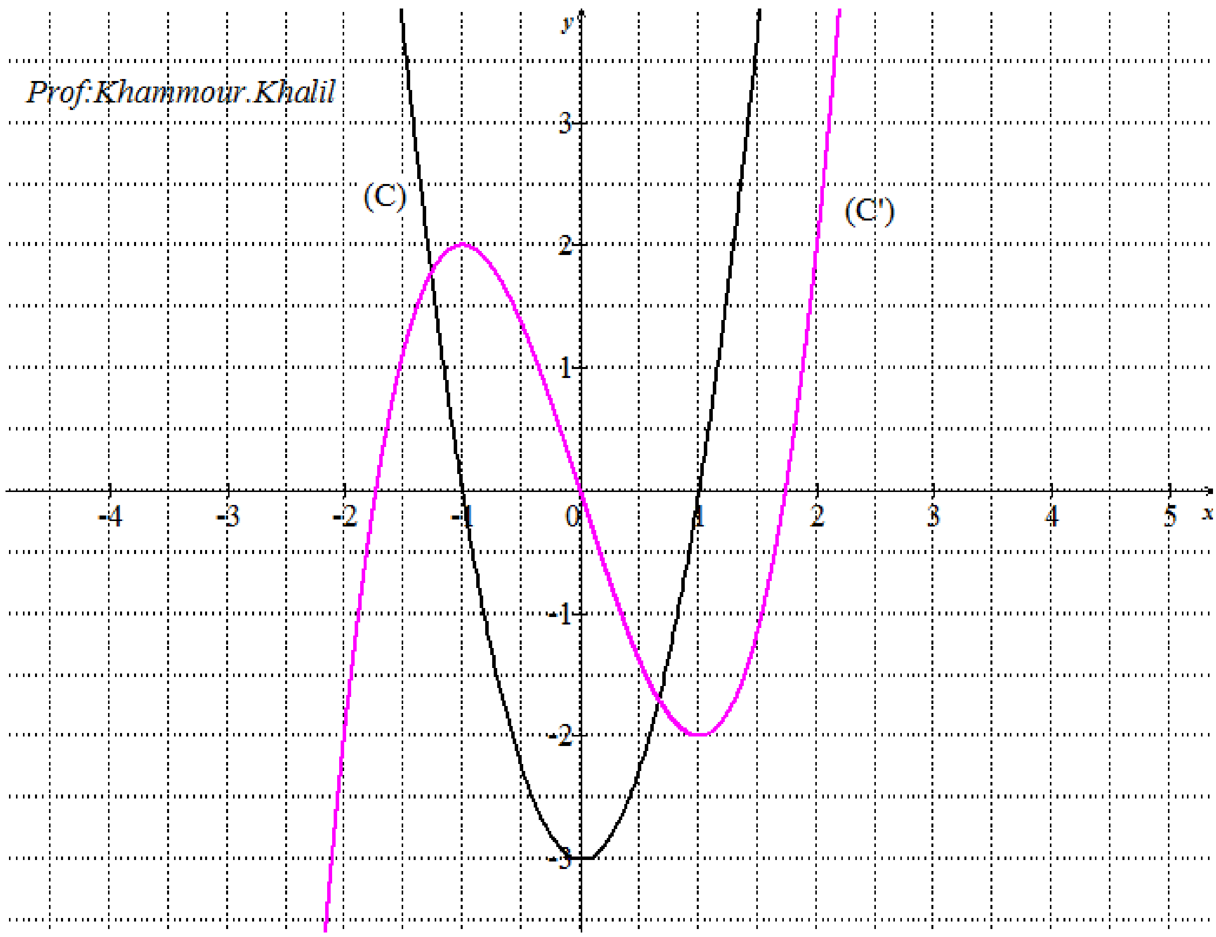
b) Représenter dans le même repère la courbe (C'') de f^{-1} .

c) Soit $I = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} f^{-1}(x)dx$ Interpréter géométriquement I puis calculer I.

Annexe



Exercice n°10 :



Par une lecture graphique

1) Déterminer parmi les courbes (C) et (C') celle de f.

2) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=1.

   a)) Hachurer $\mathscr{A}$.
   b) Calculer $\mathscr{A}$.