Mr :Khammour.K **Série de révision :** $4^{éme}$Info

Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) Dresser le tableau de variations de f.
2) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans IR une solution unique α et que $\alpha \in]\frac{2}{3},1[$
3) Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n)\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

   a) Montrer que pour tout n∈IN, $\frac{2}{3} \leq Un \leq 1$.

   b) Montrer que pour tout $x\in [\frac{2}{3},1]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{5}{9}$.

   c) En déduire que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{9} |Un-\alpha|$.

4) a) Montrer alors que $|Un - \alpha| \leq (\frac{5}{9})^n |1-\alpha|$

   b) En déduire $\lim_{\to +\infty} U_n$

Exercice n°2 :

On considère l'application f définie sur]0,4[par : $f(x)=\sqrt{\frac{2x-4}{4x-x^2}}$,

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a- Etudier les variations de f.

b- Montrer que f est une bijection de]0,4[sur IR.

c- Soit g la bijection réciproque de f. Montrer que pour tout x∈ IR $g(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

2) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]0,4[une solution unique $\alpha > 2$.

3) a- Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

b- Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ .

c- Tracer $\mathscr{C}_f$, et Δ et la courbe C' représentant g.

4) On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a- Démontrer que pour tout n∈ ℕ ; Un ≤ α.

b- Déterminer graphiquement le signe de g(x)-x

c- En déduire le sens de variation de (U_n).

d- Montrer que la suite (U_n) admet une limite l que l'on précisera.

Exercice n°3 :

Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, C et I d'affixes respectives 1-i , -2i 1-2i et $\frac{1}{2}$-2i et f de P\ {B} vers P qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z'=\frac{-2iz+4+2i}{z+2i}$

1) a- Vérifier que pour tout z≠-2i on a : $z'=\frac{-2i(z-1+2i}{z+2i}$.

a- En déduire l'ensemble E= {M(z)/z' est réel}.

2) a- Montrer que pour tout z≠-2i on a (z'+2i)(z+2i)=2i

b-Montrer que BM'.BM=2 et que $\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right) + \left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

c-En déduire que si $M \in C_{(B,1)}$ alors M' varie sur un cercle à préciser.

3) a- Montrer que [BA) est le bissectrice de $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.

b- Déterminer $f(C_{\left(I,\frac{1}{2}\right)})$.

c-Déterminer l'image par f de la droite $\Delta: y = x - 2$ privé du point B.

Exercice n°4 :

1) Résoudre dans C : $z^2+(6+5i)z+2+16i=0$

2) Soit $f(z) = z^3+2(3+2i)z^2+(7+10i)z+16-2i$

a) Déterminer le nombre complexe a tel que, pour tout nombre complexe z on a:

$f(z)= (z-a)(z^2+(6+5i)z+2+16i)$

b) Résoudre alors l'équation f(z)=0.

3) Dans le plan P complexe rapporté un repère orthonormé direct $(O,\vec{i}, \vec{j})$;on considère les points A(i), B(-4-2i) et C(-2-3i) et on désigne par z_I l'affixe du point I milieu de [AC].

a) Représenter les points A, B, C et I

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

4) a) Construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des triangles directs rectangles et isocèles en B.

b) en déduire les affixes respective z_D et z_E des points D et E .

Exercice n°5 :

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses est exacte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) La fonction f est:

a) continue sur IR b) continue en 2 c) continue en -2

2) f '(4) est égale à :

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$

3) L'équation de la tangente à **C** $_f$ au point B est:

a) y=-4x-5 b) y= 1 c) y= -4x+6

4) $\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ est égale à :

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 1