

LYCEE AIN DRAHEM	DEVOIR DE CONTROLE N°2	CL :4M
PROF : B-NEJIB	03-02-2014	DUREE :2h

EXERCICE N°1(3pts)

Répondre par **VRAI** ou **FAUX** en **justifiant la réponse** :

- 1) Soit x un entier : si $x \equiv 1 \pmod{4}$ alors $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$
- 2) Le reste modulo 17 de 2012^{32} est égale 1
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $7^{3n} - 1$ est divisible par 9
- 4) $2 \times 35^{2006} - 3 \times 84^{2007} \equiv 6 \pmod{17}$

EXERCICE N°2(4pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

- 1) Calculer u_0 et u_1
- 2) Montrer que (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.
- 3) Calculer en fonction de n l'intégrale : $\int_0^1 (1 + t)^n dt$
- 4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq \frac{2^{n+1}}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2^n}$

EXERCICE 2(7pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$. On désigne par (C_f) sa courbe dans un repère O.N.D $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a- Dresser le tableau de variation de f
b-préciser les branches infinies de (C_f)
c- tracer (C_f)
- 2) soit F la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_1^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2-2t+2}$
a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $F'(x) = 1$
b) En déduire que $F(x) = x$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2} = \frac{\pi}{4}$
- 3) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln(2) - 2 \int_1^2 \frac{x^2-x}{x^2-2x+2} dx .$$

- b) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-x}{x^2-2x+2} = 1 + \frac{x-1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-2x+2}$
- c) hachurer puis calculer l'aire du domaine limité par (C_f)
et les droites d'équations : $x = 1$; $x = 2$ et $y = 0$

EXERCICE N°3(6pts)

Soit (C) un cercle de centre I et passant par A . on considère le point B tel que $IA = IB$

et $(\widehat{IA}; \widehat{IB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, O le milieu du segment $[AB]$ la demi-droite $[OI)$ coupe le cercle (C) en D .

- 1) Soit S la similitude directe de centre A tel que $S(I) = O$. Déterminer le rapport et l'angle de S .
- 2) Soit K le projeté orthogonale de A sur (BD)
 - a- Montre que le triangle ADK est isocèle et rectangle en K .
 - b- En déduire que $S(D) = K$
 - c- Soit J le milieu de $[AD]$, montrer que I, J et K sont alignés.
- 3) Soit σ la similitude indirecte qui envoie J sur K et K sur A . on note ω son centre et Δ son axe.
 - a- Déterminer le rapport de σ
 - b- Montrer que : $\sigma\sigma\sigma = h_{\left(\omega; \frac{1}{2}\right)}$.
 - c- Déterminer $\sigma\sigma\sigma(J)$ et en déduire que $\omega = D$
- d- Déterminer l'axe Δ de σ et montrer que $\sigma(I) = H$ ou H est l'orthocentre de ABD .

BON TRAVAIL

FIGURE EXERCICE N°3

FIGURE EXERCICE N°4