Lycée ch -khaznadar Teboursouk Prof : Rakrouki .M	Devoir de Synthèse n°2	Classe : 4$^{\text{ème}}$ Math Durée : 240 minutes Date : 13/05/11

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation

EXERCICE 1: (3pts)

Cocher la réponse exacte :

1) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$ est égale à :

0 □ ; 1 □ ; $+\infty$ □ .

2) L'intégrale $\int_2^8 \dfrac{\ln(x)}{x}dx$ vaut :

$2(\ln 2)^2$ □ ; $(\ln 2)^2$ □ ; $4(\ln 2)^2$ □

3) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \dfrac{\ln(x)}{x}dx$ *et* $S = \sum\limits_{k=2}^{7} u_k = u_2 + u_3 + ... + u_7$. La somme S vaut :

$4(\ln 2)^2$ □ ; $(\ln 2)^2$ □ ; $2(\ln 2)^2$ □

4) L'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2i\bar{z} - 3$ est une similitude indirecte de centre $A(1+2i)$ et d'axe :

$\Delta : x + y + 1 = 0$ □ ; $\Delta : x - y + 1 = 0$ □ ; $\Delta : x + y - 1 = 0$ □

EXERCICE 2:(4pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(2,0,0) , B(0,2,0) , C(- 2,0,0) et D(- 2,- 2,- 2).

1)a)Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre [AC].

2) Soit E(- 1,1,0) et P le plan passant par B et perpendiculaire à la droite (OE).

a) Donner une équation cartésienne du plan P.

b) Montrer que P et S sont sécants suivants un cercle ζ dont on déterminera le centre H et le rayon r.

3) Soit h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tels que $\begin{cases} x' = -3x - 4 \\ y' = -3y + 4 \\ z' = -3z \end{cases}$.

a) Déterminer la nature de h et préciser ses éléments caractéristiques. déterminer $O'=h(O)$.

b) Calculer le volume v de tétraèdre ABCD et déduire le volume v ' du tétraèdre image de ABCD par h.

c) Déterminer la sphère (S') image de (S) par h.

4) Déterminer les translations qui transforme P en un plan tangent à (S') et de vecteurs orthogonaux à P.

<u>EXERCICE3: (4pts)</u>

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 *et* $(\sqrt{2}-1)(1-i)$. Soit g_α l'application du plan dans le plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z'=-\frac{\sqrt{2}}{4}(\alpha+i)z+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer α pour que g_α soit une translation.

2) Montrer que g_1 est une similitude directe et déterminer ses éléments caractéristiques.

3) Déterminer la transformation complexe associée à l'homothétie h de centre B et de rapport $-\sqrt{2}$.

4)a) Montrer que l'expression complexe de l'application $S=g_1oh$ est : $z'=\frac{1}{2}(1+i)z$.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de S.

5) On pose : $M_0=A$; $M_1=S(M_0)$ et pour tout $n\in IN;\ M_{n+1}=S(M_n)$. Soit z_n l'affixe de M_n.

a)Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis déduire que $\forall n\in IN$, $z_n=\frac{e^{in\frac{\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

b) Montrer que pour tout $n\in IN;\ Aff(\overrightarrow{M_nM_{n+1}})=\frac{e^{i(n+3)\frac{\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^{n+1}}$.

c) Pour tout $n\in IN^*$, on pose L_n la longueur du polygone $M_0M_1M_2......M_n$.

Montrer que $L_n=(\sqrt{2}+1)\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$.

6) Pour tout $n\in IN^*$, on pose : $S^n=\underbrace{SoSo.....oS}_{nfois}$.

a) Montrer que S^n est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles S^n est une homothétie de rapport négatif.

c) Caractériser l'application $\varphi=S_{(OB)}oS^8$ où $S_{(OB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OB).

EXERCICE4 : (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ $par: \ f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.

2) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8, on pose : $u_n=\sum_{k=8}^{n} f(k)$.

a) Soit k un entier supérieur ou égal à 8. Montrer que $f(k+1)\le \int_k^{k+1} f(t)dt \le f(k)$.

b) En déduire que pour tout entier $n\ge 8$, $u_{n+1}-f(8)\le \int_8^{n+1} f(t)dt \le u_n$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_8^{n+1} f(t)dt$.

d) En déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Pour tout entier $n\ge 8$, on pose $v_n=u_n-\int_8^{n+1} f(t)dt$.

a) Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis déduire que $u_n-f(8)\le \int_8^{n+1} f(t)dt \le u_n$ et que (v_n) est bornée.

b) En utilisant 1)a), montrer que la suite (v_n) est croissante.

c) Prouver que (v_n) est convergente et montrer que sa limite l vérifie $0\le l\le 0,74$.

EXERCICE5 : (5pts)

Soit f_n la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ $par: \ f_n(x)=\dfrac{e^x}{(x+1)^n}$; $n\in IN^*$. On désigne par ζ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a)Dresser le tableau de variation de f_n.

b) Montrer que pour tout $x>-1$, $f'_n(x)=f_n(x)-nf_{n+1}(x)$.

2) Etudier les positions relatives des courbes ζ_1 et ζ_2 puis construire ζ_1 et ζ_2.

3) Pour tout $n\in IN^*$, on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que $\forall n\in IN^*\setminus\{1\}$, $\dfrac{1}{n-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\le I_n\le \dfrac{e}{n-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Montrer que $\forall n\in IN^*$, $nI_{n+1}=1+I_n-\dfrac{e}{2^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

4) Pout tout réel $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_0^{2\ln x} f_1(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1;+\infty[$ et calculer F ' (x) puis déduire que $F(x) = \int_1^x \frac{2t}{1+2\ln t}dt$.

b) Montrer que $\forall x \geq 2$, $F(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{2t}{1+2\ln t}dt$.

5)a) Montrer que $\forall x \geq 2$, il existe un réel $c \in \left[\frac{x}{2};x\right]$ tel que $F(x) \geq \frac{cx}{1+2\ln c}$.

b) En déduire que $\forall x \geq 2$, $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{x}{2(1+2\ln x)}$ puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variations.

d) Montrer que la courbe Γ de F admet un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{e}$.

e) Tracer l'allure de Γ. On donne $F(\sqrt{e}) \simeq 1,2$.

BON TRAVAIL