Lycée ch -khaznadar Teboursouk
Prof : Rakrouki .M

BAC BLANC
2012

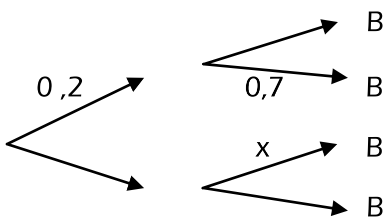
Section : $4^{ème}$ Math
Durée : 240 minutes

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation

EXERCICE1(3pts) :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre où A et B sont deux événements.

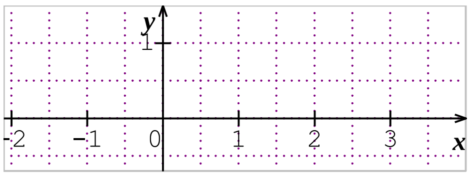


a) Si p(B) = 0,82 alors $p(\overline{B}/\overline{A}) = 0{,}05$.

b) Si A et B sont indépendants alors x = 0,3.

2) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi continue dont la courbe de sa fonction de répartition donné ci-contre.

a) La fonction densité f(x) de X est : $f(x) = \frac{1}{2}$.



b) $p(X \leq 1) = \frac{2}{3}$.

EXERCICE2 (4pts) :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(0,1,0)$, $B(\frac{1}{2},0,0)$, $C(\frac{1}{2},1,1)$ *et* $D(0,0,1)$.

1)a)Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + y - z - 1 = 0$.

b) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires puis calculer le volume du tétraèdre ABCD.

c) Calculer l'aire du triangle ABC puis déduire la distance du point D au plan (ABC).

2) Soit Δ la droite passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Donner une représentation paramétrique de Δ.

b) Montrer que le point d'intersection E de la droite Δ et du plan (ABC) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

3) On considère l'ensemble S des points M(x,y,z)vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x-y-z+\frac{4}{3}=0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Prouver que le plan (ABC) est tangent à la sphère S en E.

4) Soit f l'application qui à tout point M(x,y,z) associe le point M ' (x',y',z') tel que : $\begin{cases} x' = 2x-\frac{2}{3} \\ y' = 2y-\frac{1}{3} \\ z' = 2z+\frac{1}{3} \end{cases}$.

a) Préciser la nature de f et donner ses éléments caractéristiques. Déterminer $E' = f(E)$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P image du plan (ABC) par f.

c) Soit S ' l'image de S par f. Déterminer $S' \cap (ABC)$..

EXERCICE3 (3,5) :

Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à 10^{-2} près. Une machine est achetée à 3000 dinars. Le prix de revente y, exprimer en dinars est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3000	2400	1920	1536	1229	983

1)a) Montrer qu'un ajustement affine du nuage des points associé à cette série statistique est justifié.

b) Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

c) Estimer le prix de revente d'une machine après 6 années d'utilisation.

2) On pose $z = \ln(y)$.

a) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

b) Justifier que $y \simeq 3011\times(0,8)^x$ puis donner une estimation du prix de revente d'une machine après 6 années d'utilisation.

c) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 dinars.

3) Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 dinars. Avec lequel des deux ajustement l'estimation faite est-elle la meilleure. Expliquer.

EXERCICE4 (4pts) :

Une équipe de football participe chaque année à deux tournois l'un concerne la coupe et l'autre concerne le championnat. La probabilité pour que cette équipe gagne le championnat est de 0,4, celle que cette gagne la coupe quand elle a gagné le championnat est de 0,7 et la probabilité que cette équipe gagne la coupe quand elle n'a pas gagné le championnat est de 0,3.

On considère les événements suivants :

B « l'équipe gagne le championnat » , C : « l'équipe gagne la coupe ».

1)a) Donner un arbre pondéré qui illustre les données ci-dessus.

b) Calculer la probabilité pour que cette équipe ne gagne ni le championnat et ni la coupe.

c) Calculer la probabilité pour que cette équipe gagne la coupe.

2) La fédération de football consacre 300 milles dinars pour l'équipe qui remporte le championnat et 200 milles dinars pour l'équipe qui remporte la coupe.

Quel est le revenu moyen de cette équipe.

3) Cette équipe participe 5 années successives à ces deux tournois, le résultat de chaque année est indépendant des résultats des autres. Calculer la probabilité pour que cette équipe remporte au moins trois fois le doublé : coupe et championnat.

<u>**EXERCICE5 (5 ,5pts) :**</u>

A) 1) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = (2-x)e^{x} - 2$.

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solutions . on notera a la solution non nul. Vérifier que $1 < a < 2$.

c) En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue sur IR.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ $et\ que : f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$.

c) Montrer que f(a) = a(2 – a).

d) Etudier les variations de f puis construire la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on prend a = 1,6).

B) On considère la fonction F définie sur $[1;+\infty[$ $par : F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} f(t)dt$.

1)a) Justifier l'existence de F(x) pour tout x de $[1;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]1;\sqrt{e}\right[$ il existe $c \in \left[\ln x; 2\ln x\right]$ *tel que* $F(x) = \dfrac{c^2}{e^c - 1}\ln x$ et que $\dfrac{(\ln x)^3}{(x-1)^2} \le \dfrac{F(x)}{x-1} \le \dfrac{4(\ln x)^3}{(x-1)^2(x+1)}$.

c) En déduire que F est dérivable à droite en 1 et que $F'_d(1) = 0$.

2)a) Montrer que F est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ *et que* : $F'(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x(x^2-1)}(7-x)$.

b) Prouver que pour tout $x \in \left[e^2;+\infty\right[$ *on a* : $\dfrac{4(\ln x)^3}{x^2-1} \le F(x) \le \dfrac{(\ln x)^3}{x-1}$.

c) Dresser alors le tableau de variation de F (on ne cherchera pas à calculer F(7)).

BON TRAVAIL