

ENONCE**Exercice 1**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ et \mathcal{C} sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et donner sa fonction dérivée f' .
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Soit V le volume du solide S engendré par la rotation de \mathcal{C} autour de l'axe des abscisses.
 - a) Dessiner S
 - b) Calculer V .

4) Soit g la fonction définie par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

- a) Justifier l'existence et la dérivabilité de g sur l'intervalle $[0,1]$.
- b) Préciser la valeur de $g(0)$ et calculer $g'(x)$ pour tout x de $[0,1]$.

5) Soit h la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = g[\sin^2(x)]$.

- a) Démontrer que h est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.
- b) En déduire que $\int_0^{\sin^2(x)} \sqrt{t(1-t)}dt = \frac{x}{4} - \frac{\sin(4x)}{16}$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$.

- 1) Montrer que f est continue et strictement monotone sur $[6, +\infty[$.
- 2) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.
- 3) Donner le tableau de variation de f^{-1} .
- 4) On pose $h(x) = x^2 - x\sqrt{x^2 - 8} - 12$.
 - a) Montrer que h ne s'annule pas sur I .
 - b) Calculer $h(3)$ et en déduire le signe de h sur I .
 - c) Calculer, pour x dans I , $f^{-1}(x)$.
 - d) Déterminer la fonction dérivée de f^{-1} .

Exercice 3

Soit U et V deux suites définies sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 1 & \text{et} & V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} & \text{et} & V_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que la suite $(U_n - V_n)_n$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- 2) Montrer que U et V sont deux suites adjacentes. Conclure à la convergence de ces deux suites.
- 3) Soit T la suite définie sur \mathbb{N} par $T_n = 2U_n + 3V_n$.
 - a) Montrer que T est une suite constante et déterminer cette constante.
 - b) En déduire la valeur de la limite de U et de V .

Exercice 4

Soit $ABCD$ un carré de sens direct, I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. On note r le quart de tour direct de centre A et on pose $f = S_{(IK)} \circ r$ et $g = r \circ S_{(IK)}$.

- 1) Justifier que f et g sont des antidéplacements.
- 2) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$ et en déduire que f est une symétrie glissée d'axe (IJ) .
- 3) Déterminer $f(I)$ et en déduire le vecteur de f .
- 4) Déterminer la nature exacte de g .
- 5) a) Soit E le point d'intersection des droites (BC) et (IL) . Démontrer que B est le milieu de $[JE]$.
- b) Déterminer l'image de E par $f \circ g$, la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$.

Exercice 5

Soit le polynôme $P(x) = 6x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 6x - 5$.

1) a) Calculer $P(1)$ et $P(5)$.

b) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{N} .

2) Montrer que si p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de p et q^5 .
(On pourra utiliser la décomposition d'un entier naturel en produit fini de nombres premiers).

3) Soit $\frac{p}{q}$ un rationnel mis sous sa forme irréductible.

a) Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une solution de $P(x) = 0$ alors p divise 5 et q divise 6.

b) Montrer qu'une solution de $P(x) = 0$ ne peut être négative.

c) Dédurre de ce qui précède que $P(x) = 0$ admet une seule solution rationnelle que l'on déterminera.

4) Résoudre, dans le corps des nombres complexes \mathbb{C} , l'équation $P(x) = 0$.

CORRIGE

Exercice 1

1) $D_f = [0, 1]$

La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est une fonction polynôme définie sur $[0, 1]$ donc elle est dérivable sur $[0, 1]$ de plus elle est strictement positive sur $]0, 1[$ donc f est dérivable sur $]0, 1[$ et $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

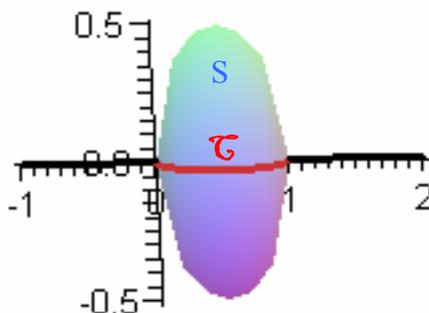
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et \mathcal{C} admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{x(1-x)}} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et \mathcal{C} admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 1.

Conclusion : f est dérivable sur $]0, 1[$ et $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$

2)

x	0	$\frac{1}{2}$	1		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0		



3) a)

$$b) V = \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \pi \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

4) a) f est continue sur $[0, 1]$ d'où l'existence de g et sa dérivabilité sur $[0, 1]$.

b) $g(0) = 0$ et $g'(x) = f(x)$.

5) a) La fonction \sin^2 est dérivable sur I et $\sin^2(I) \subset [0,1]$ et g est dérivable sur $[0,1]$ donc h est dérivable sur I .

$$h'(x) = 2\cos(x)\sin(x)f'(\sin^2(x)) = 2\cos(x)\sin(x)\sqrt{\sin^2(x)(1-\sin^2(x))} = 2\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(4x)$$

b) On sait que pour tout x de I , $h'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(4x)$ donc $h(x) = \frac{x}{4} - \frac{\sin(4x)}{16} + k$ or $h(0) = g(0) = 0$ donc $k = 0$

$$\text{d'où } h(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{x}{4} - \frac{\sin(4x)}{16}.$$

Exercice 2

1) la fonction $x : t \mapsto x - 2$ est une fonction polynôme définie sur $[6, +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[6, +\infty[$ de plus elle est strictement positive sur $[6, +\infty[$ donc la fonction $x : t \mapsto \sqrt{x - 2}$ est dérivable sur $[6, +\infty[$ de plus elle ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est dérivable sur $[6, +\infty[$ car la fonction $x : t \mapsto x$ est aussi dérivable.

$$f'(x) = \frac{x-4}{2(x-2)\sqrt{x-2}} > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } [6, +\infty[.$$

2) f est continue et strictement croissante sur $[6, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[6, +\infty[$ sur

$$f([6, +\infty[) = [f(6), \lim_{+\infty} f] = [3, +\infty[= I$$

3)

x	3	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	6	$+\infty$

$$4) a) \begin{cases} h(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12 = x\sqrt{x^2 - 8} \\ x \geq 3 \end{cases}$$

● Solutions de $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[3, 2\sqrt{3}[$:

si $x \in [3, 2\sqrt{3}[$ alors $x^2 - 12 < 0$ donc on ne peut jamais avoir $x^2 - 12 = x\sqrt{x^2 - 8}$ donc h ne s'annule pas sur $[3, 2\sqrt{3}[$.

● Solutions de $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[2\sqrt{3}, +\infty[$:

$$\begin{cases} h(x) = 0 \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12 = x\sqrt{x^2 - 8} \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 24x^2 - 144 = x^2(x^2 - 8) \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16x^2 - 144 = 0 \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ impossible donc } h \text{ ne}$$

s'annule pas sur $[2\sqrt{3}, +\infty[$.

Conclusion : h ne s'annule pas sur I .

b) h ne s'annule pas sur I et puisqu'elle est continue sur I donc elle garde un signe constant c à d le signe de $h(3)$ or $h(3) = -6$ donc h est strictement négative sur $[3, +\infty[$

c) Soit x un réel de I .

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y-2}} = x \Leftrightarrow \frac{y^2}{y-2} = x^2 \Leftrightarrow x^2(y-2) = y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2y + 2x^2 = 0.$$

$\Delta = x^4 - 8x^2 = x^2(x^2 - 8) > 0$ donc l'équation en y , $y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$, admet deux solutions distinctes

$$y' = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 8}}{2} \text{ et } y'' = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 8}}{2} \text{ or } y \geq 6 \text{ et comme } h(x) < 0 \text{ donc } \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 8}}{2} < 6$$

$$\text{donc } f^{-1}(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 8}}{2}.$$

$$d) f^{-1} \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (f^{-1})'(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 8} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - 8}}.$$

Exercice 3

$$1) U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{U_n + 2V_n}{3} = \frac{3U_n + 3V_n - 2U_n - 4V_n}{6} = \frac{U_n - V_n}{6} = \frac{1}{6}(U_n - V_n) \text{ donc la suite}$$

$(U_n - V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $U_0 - V_0 = -1$.

$$2) \text{ On a } U_n - V_n = -\left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 \text{ et } U_n < V_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{2U_n}{2} = \frac{-U_n + V_n}{2} > 0 \text{ donc la suite } U \text{ est strictement croissante.}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - \frac{3V_n}{3} = \frac{U_n - V_n}{3} < 0 \text{ donc } V \text{ est une suite strictement décroissante.}$$

Conclusion : $\begin{cases} U \text{ est une suite croissante} \\ V \text{ est une suite décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 \end{cases}$ donc les suites U et V sont adjacentes.

U et V sont deux suites adjacentes donc elles convergent vers la même limite L .

3) a) $T_{n+1} - T_n = 2U_{n+1} + 3V_{n+1} - 2U_n - 3V_n = U_n + V_n + U_n + 2V_n - 2U_n - 3V_n = 0$ donc T est une suite constante d'où $T_n = T_0 = 8$.

b) U et V sont deux suites convergentes donc T est convergente d'où $2L + 3L = 8$ donc $L = \frac{8}{5}$.

Exercice 4

1) f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc c 'est un antidéplacement. Il en est de même pour g .

$$2) f(A) = S_{(IK)}[r(A)] = S_{(IK)}(A) = B \text{ et } f(B) = S_{(IK)}[r(B)] = S_{(IK)}(D) = C.$$

Soit Δ l'axe de f alors $A*B = I$ appartient à Δ de même $B*C = J$ appartient à Δ donc $\Delta = (IJ)$.

$f \circ f(A) = f[f(A)] = f(B) = C$ donc f n'est pas une symétrie axiale donc c 'est une symétrie glissante.

$$3) \text{ Soit } \vec{u} \text{ le vecteur de } f \text{ alors } f = S_{(IJ)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}.$$

$$\text{Puisque } f(I) = S_{(IK)}[r(I)] = S_{(IJ)}(L) = J \text{ alors } \vec{u} = \vec{IJ}.$$

$$4) \text{ } g \circ f = r \circ S_{(IK)} \circ S_{(IK)} \circ r = r \circ r = R_{\left(A, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = R_{(A, \pi)} = S_A : \text{symétrie centrale de centre } A.$$

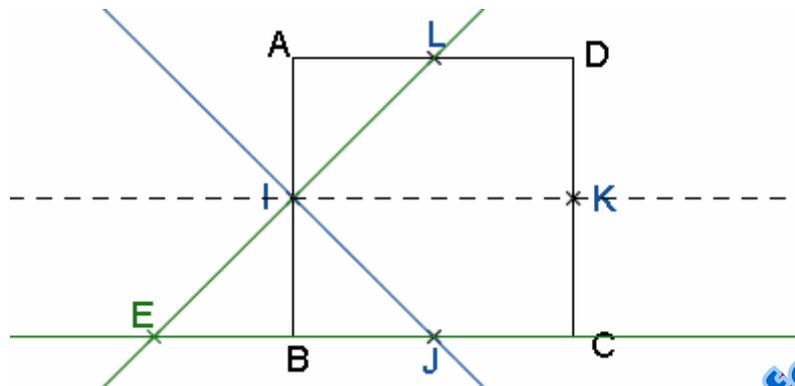
$$5) \text{ a) Dans le triangle } EIJ \text{ on a } (IB) \parallel (LJ) \text{ donc d'après Thalès on aura } \frac{\overline{EI}}{\overline{EL}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EJ}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{LJ}} = \frac{1}{2} \text{ donc } \vec{EI} = \frac{1}{2} \vec{EL}$$

donc I est le milieu de $[EL]$.

$$\text{Dans le triangle } EIJ \text{ on a } \begin{cases} I = E * L \\ (IB) \parallel (LJ) \end{cases} \text{ donc } B = E * J.$$

$$b) \text{ On pose } S_{(IK)}(E) = E' \text{ alors } AI = AE' \text{ et } (\widehat{AE'}, \widehat{AI}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ donc } r(E') = I \text{ or } f(I) = J \text{ donc } f \circ g(E) = J$$

On constate que $f \circ g(B) = f[g(B)] = f(A) = B$ or $f \circ g$ est un déplacement donc $f \circ g$ est soit l'identité du plan soit une rotation d'où $f \circ g$ est une rotation de centre B et d'angle $(\overline{BE}, \overline{BJ})$ c à d $f \circ g$ est la symétrie centrale de centre B .



Exercice 5

$$1) \text{ a) } P(1) = 6 - 5 + 6 - 5 + 6 - 5 = 3 \text{ et } P(5) = 16275.$$

b) Soit n un entier naturel.

n est une solution de $P(x) = 0 \Leftrightarrow 6n^5 - 5n^4 + 6n^3 - 5n^2 + 6n - 5 = 0 \Leftrightarrow n(6n^4 - 5n^3 + 6n^2 - 5n + 6) = 5$ donc n est un diviseur de 5 d'où $n = 1$ ou $n = 5$ or 1 et 5 ne sont pas solutions de $P(x) = 0$ donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{N} .

2) Soit $p = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de p en produit de facteurs premiers et soit $q = q_1^{\beta_1} \times \dots \times q_j^{\beta_j}$ la décomposition de q en produit de facteurs premiers.

Si p et q^5 ne sont pas premiers entre eux alors ils possèdent un diviseur commun d différent de 1 or d doit être le produit des facteurs premiers parmi les facteurs $p_1, \dots, p_i, q_1, \dots, q_j$ et par suite p et q ont un diviseur commun différent de 1 ce qui est absurde car p et q sont premiers entre eux.

Conclusion : si p et q sont premiers entre eux alors il en est de même de p et q^5 .

3) a) $\frac{p}{q}$ est une solution de $P(x) = 0 \Leftrightarrow 6\frac{p^5}{q^5} - 5\frac{p^4}{q^4} + 6\frac{p^3}{q^3} - 5\frac{p^2}{q^2} + 6\frac{p}{q} - 5 = 0$ donc

$p(6p^4 - 5p^3q + 6p^2q^2 - 5pq^3 + 6q^4) = 5q^5$ et $q(5p^4 - 6p^3q + 5p^2q^2 - 6pq^3 + 5q^4) = 6p^5$ or p et q sont premiers entre eux donc p et q^5 sont premiers entre eux donc p est un diviseur de 5 de même q et p^5 sont premiers entre eux donc q divise 6

b) Soit x un réel strictement négatif alors x^5 et x^3 sont strictement négatifs donc $P(x) < 0$ c à d x n'est pas solution de $P(x) = 0$.

c) Puisque p est un diviseur de 5 et q est un diviseur de 6 alors les valeurs possibles de

$\frac{p}{q}$ sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}$ et $\frac{5}{6}$. On sait déjà que 1 et 5 ne sont pas solutions de $P(x) = 0$ et on a :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{6}$
P(x)	$-\frac{21}{8}$	$-\frac{91}{27}$	$-\frac{1333}{324}$	$\frac{3705}{8}$	$\frac{4655}{81}$	0

donc $\frac{5}{6}$ est la seule solution rationnelle de $P(x) = 0$.

4) $\frac{5}{6}$ est une solution de $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = \left(x - \frac{5}{6}\right)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \Leftrightarrow P(x) =$

$ax^5 + \left(b - \frac{5}{6}a\right)x^4 + \left(c - \frac{5}{6}b\right)x^3 + \left(d - \frac{5}{6}c\right)x^2 + \left(e - \frac{5}{6}d\right)x - \frac{5}{6}e$ et par identification on aura :

$$\begin{cases} a = 6 \\ b - \frac{5}{6}a = -5 \\ c - \frac{5}{6}b = 6 \\ d - \frac{5}{6}c = -5 \\ e - \frac{5}{6}d = 6 \\ -\frac{5}{6}e = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 0 \\ c = 6 \\ d = 0 \\ e = 6 \end{cases} \text{ donc } P(x) = \left(x - \frac{5}{6}\right)(6x^4 + 6x^2 + 6) = (6x - 5)(x^4 + x^2 + 1).$$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 0$ ou $6x - 5 = 0$.

Résolution de $x^4 + x^2 + 1 = 0$:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ X^2 + X + 1 = 0 \end{cases}$$

www.boufaresmaths.net

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ donc l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ admet les solutions $X' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $X'' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

On a donc $X' = \left[1, -\frac{2\pi}{3}\right]$ et $X'' = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$$x^2 = \left[1, -\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \left[1, -\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x^2 = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \left[1, \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les solutions de $x^4 + x^2 + 1 = 0$ sont $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion : les solutions de $P(x) = 0$ dans \mathbb{C} sont : $\frac{5}{6}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

www.houarasmaths.net