

<i>L. Regueb</i>	<i>Mathématiques</i>	<i>Classe : 4<sup>ème</sup> M</i>
<i>Prof : Salhi Nouredine</i>	<i>Devoir de Contrôle №3</i>	<i>Le : 19/04/2013 D: 2h</i>

Exercice1(8pts)

On considère le cube ABCDEFGH de coté 1 représenté ci-contre .

Dans tout l'exercice , l'espace est rapporté au repère orthonormal

$(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$  .

On note K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

I) 1) Montrer que le point K a pour coordonnées  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  .

2) Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales .

3) Calculer la distance EK .

II) Soit M un point du segment [HG] . On note ,  $m = HM$  .

(m est donc un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1]).

1) Montrer que , pour tout réel  $m \in [0 ; 1]$ , le volume du tétraèdre EMFD , en unités de volume,

est égal à  $\frac{1}{6}$  .

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est :  $(m - 1)x + y - mz = 0$  .

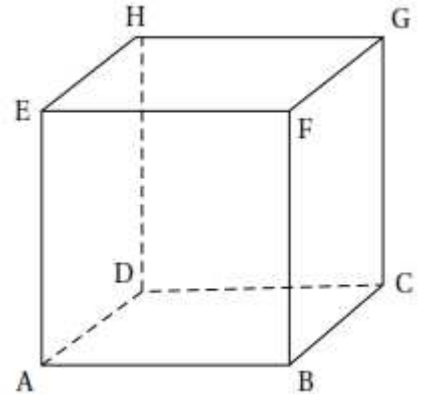
3) On note  $d_m$  la distance du point E au plan (MFD) .

a) Montrer que pour tout réel  $m \in [0 ; 1]$  ,  $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$  .

b) Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance  $d_m$  est maximale .

c) En déduire que lorsque la distance  $d_m$  est maximale , le point K est le projeté orthogonal de E sur

le plan (MFD) .



Exercice2(5pts)

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :

(E):  $y' + (1 + \tan(x))y = \cos(x)$  ; (E<sub>0</sub>):  $y' + y = 1$  .

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E<sub>0</sub>) .

2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et telles que  $f(x) = g(x)\cos(x)$  .

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E<sub>0</sub>)

3) Déterminer la solution f de (E) telle que  $f(0) = 0$  .

### Exercice 3 (7pts)

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes .

- 1) Si l'on divise un entier  $a$  par 18 , le reste est 13 . Quel est le reste de la division de  $a$  par 6 ?
- 2) Déterminer les entiers relatifs  $n$  tel que :  $n + 1$  divise  $3n - 4$  .
- 3) Montrer que si un entier  $n$  n'est pas multiple de 7 alors  $(n^6 - 1)$  est un multiple de 7 .
- 4) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  , le nombre  $2^{2^n} + 6n - 1$  est divisible par 9 .
- 5) On divise un entier naturel  $n$  par 137 et 143 . Les quotients sont égaux et les restes sont respectivement 131 et 5 . Quel est cet entier  $n$  ?
- 6) On pose  $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$   
Soit  $n$  un entier naturel . Discuter suivant les valeurs de  $n$  , le reste de  $7^n$  modulo 100.  
En déduire que  $a + 1$  est un multiple de 100 .