Exercice n° : 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une seule réponse par question est acceptée et ***aucune justification n'est demandée.***

Partie : I

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire brut en euros de 2000 à 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
SMIC horaire en euros y_i	6,41	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27

(Source : INSEE)

1) Les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i; y_i)$ sont :

a) $(3;7,28)$; b) $(4;7,28)$; c) $(3;7,01)$; d) $(2,15;11,05)$.

2) Une équation de la droite de régression D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés est :

a) $y = 0,16x - 2,7$; b) $y = 2,1x + 3,12$; c) $y = 7x + 12,5$; d) $y = 0,32x + 6,31$.

Partie : II

3) Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.

Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

a) $y = x + 2$; b) $y = -x + 4$; c) $y = 3x + 1$; d) $y = x + 3$.

4) La valeur moyenne de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ sur l'intervalle : $[-1;1]$ est égale à :

a) $\bar{f} = \dfrac{e-1}{2}$; b) $\bar{f} = \dfrac{1}{2}$; c) $\bar{f} = \dfrac{2e - e^{-1}}{2}$; d) $\bar{f} = \dfrac{3}{2}$.

Exercice n° : 2 (5 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle [1 ; 46].

1. On considère l'équation :

$$(E) : 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1\ (47)$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $ab \equiv 0\ (47)$ alors $a \equiv 0\ (47)$ ou $b \equiv 0\ (47)$.

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1\ (47)$ alors $a \equiv 1\ (47)$ ou $a \equiv -1\ (47)$.

3. a. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1\ (47)$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté inv(p), appartenant à A tel que :

$$p \times \mathrm{inv}(p) \equiv 1\ (47).$$

b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient p = inv(p) ?

c. Montrer que $46! \equiv -1\ (47)$.

Exercice n° : 3 (4 points)

1. Soit f la fonction définie sur [1 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur [1 ; +∞[par : $H(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur [1 ; +∞[

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre H(3).

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre H(3).

a. Montrer que pour tout réel x > 0, $\dfrac{x}{e^x - 1} = x \times \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x)dx = 3\ln\left(1 - \dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right)dx$.

c. Montrer que si $1 \le x \le 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \le \ln(1 - e^{-x}) \le \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^3}\right)$

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right)dx$ puis de $\int_1^3 f(x)dx$.

Exercice n° : 4 (7 points)

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur R par $f_n(x) = \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données en annexe ci-jointe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur R par $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

2. a. Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur R.

c. Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. a. Démontrer que le point I_1 de coordonnées (ln7, 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1.

c. Tracer la droite (T_1).

4. a. Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur R.

b. Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0 ; ln7].

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A(0, \frac{1}{2})$ appartient à la courbe C_n.

2.a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse.

On note I_n ce point d'intersection.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n.

c. Tracer les droites (T_2) et (T_3).

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \dfrac{n}{\ln 7}\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx$.

Montrer que la suite (u_n) est constante.

Annexe (Exercice n° 4)