Prof : **Béchir Bouazizi** — **Devoir de synthèse n°2** — Classe : 4°M2

Lycée Cité Elmanar — Durée : 4heures — Date : 06/03/2012

EXERCICE N°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une et une seule des trois réponses proposées est exacte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La fonction $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ est égale à :

a) 2 b) 1 c) 0

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln(1+e^{-x})=$

a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$

3) La valeur moyenne de la fonction $f: x\mapsto 2\frac{\ln x}{x}$ sur $[1,e]$ est :

a) $\frac{1}{e-1}$ b) $\frac{2}{e-1}$ c) $\frac{1}{2(e-1)}$

4) La fonction $F: x\mapsto \int_x^{2x}\frac{dt}{\ln t}$ est définie sur :

a) $]0,+\infty[$ b) $]0,1[\cup]1,+\infty[$ c) $]0,\frac{1}{2}[\cup]1,+\infty[$

5) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ellipse $\Gamma: \frac{(x-2)^2}{5}+(y+1)^2=1$ est

i) d'excentricité :

a) $e=5$ b) $e=\frac{1}{5}$ c) $e=\frac{2}{\sqrt{5}}$

ii) De centre le point :

a) $O(0,0)$ b) $\Omega(-2,1)$ c) $\Omega(2,-1)$

EXERCICE N°2: (7 points)

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=e^{\sqrt{x-1}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
   b- Dresser le tableau de variation de f
   c- Montrer que (C) admet un point d'inflexion I. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en I.
   d- Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$
   e- Utiliser la courbe de la fonction exponentielle tracée dans l'annexe ci-jointe figure1, pour construire le point I, la tangente (T) et la courbe (C).
2) Soit n un entier non nul.
   a- Montrer que l'équation $f(x)=\frac{n}{x-1}$ admet une unique solution α_n.
   b- Vérifier que pour tout entier $n\geq 3$, $1<\alpha_n<(\ln n)^2+1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$.
3) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_1^{1+x^2} f(t)dt$$

   a- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x)=2xe^{|x|}$.
   b- En intégrant par parties, calculer $F(x)$ pour $x\geq 0$.
4) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe(C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
5) Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entrer 0 et n-1.
   a- Montrer que :

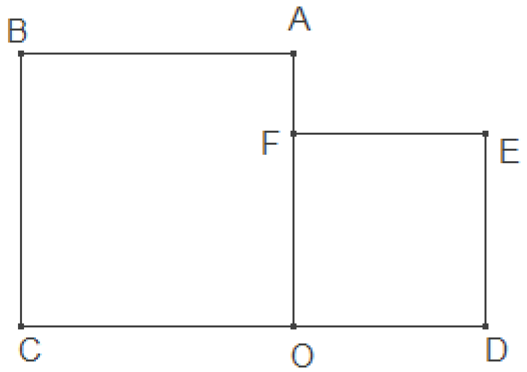
$$\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

   b- On pose $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
      i) Montrer que $\frac{1}{n}+A\leq U_n\leq\frac{e}{n}+A$
      ii) En déduire la limite de la suite (U_n).

EXERCICE N°3 : (4 points)

Dans la figure ci-dessous OABC et ODEF sont deux carrés de sens direct.

1) Soit S la similitude directe de centre O et qui transforme A en B ;
   a) Préciser le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que : S(D)=E.
2) Soit I le point d'intersection des droites (AD) et (BE).
   a) Montrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
   b) En déduire que IAC est un triangle rectangle.
3) a) Déterminer les images de A et D par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   b) En déduire que les droites (CF), (AD) et (BE) sont concourantes.
4) Soit S' la similitude indirecte A en O et O en B.
   a) Trouver le rapport de S'.
   b) Soit Ω le centre de S'. Montrer que Ω est le symétrique de B par rapport à A.
   c) Trouver ainsi l'axe de S'.



EXERCICE N°4 : (6 points)

Dans la figure 2 ; dans l'annexe ci-jointe D est une droite, A est un point n'appartenant pas à D et H son projeté orthogonal sur D.

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des foyers F des paraboles de directrice D et passant par A.
2) Soit B le foyer de la parabole $\mathcal{P}$ de sommet A et de directrice D. On muni le plan du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ où $\vec{\imath}$ est un vecteur directeur de D.
   a) Montrer qu'une équation de $\mathcal{P}$ est $x^2 = 4y$. Puis la tracer.
   b) Soit $t > 0$. Vérifier que le point $\mathrm{G}\left(\sqrt{t}, \frac{t}{4}\right)$ est un point de $\mathcal{P}$.
   c) Ecrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{P}$ en G .
   d) Déterminer les coordonnées du point E intersection de la tangente $\mathcal{T}$ et la directrice D. Puis montrer que le triangle BEG est rectangle en B.
3) Soient $\mathrm{M}(x, y)$ un point et K son projeté orthogonal sur D. On considère $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M tel que $\mathrm{MB}^2 - 5\mathrm{MK}^2 = 9$.
   a) Montrer qu'une équation de $\mathcal{H}$ est
   $$\frac{x^2}{4} - \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$
   b) En déduire que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on déterminera les coordonnées de ses sommets, de ses foyers et les équations des asymptotes.
   c) Construire $\mathcal{H}$ dans le même repère par une autre couleur.

Annexe à rendre :
PRENOM : ………………………………….NOM :………………………………..N° : ……CLASSE : 4M2

Fig 1

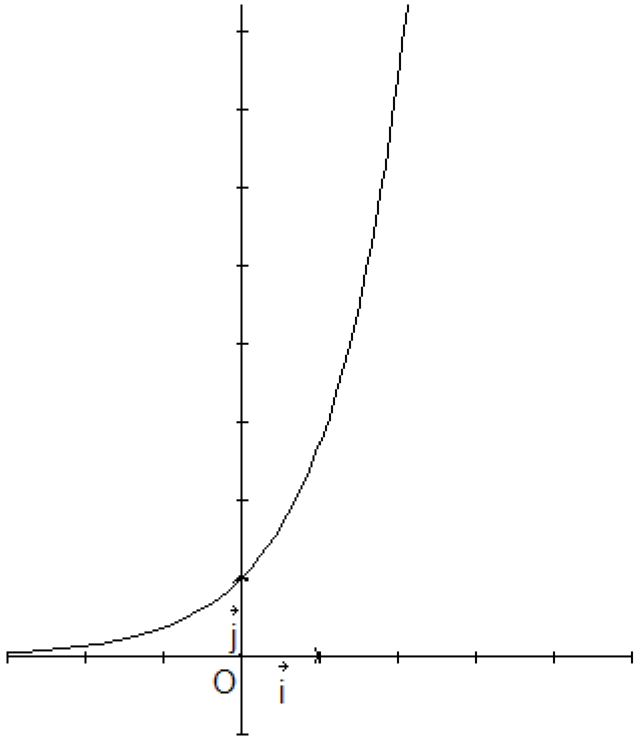


Fig 2