Lycées Houmet Souk 1 & 2 Profs: Loukil . M & Zayoud . A	Devoir de Synthèse N : 2 Durée : 4 Heures	4 Mathématique 06 Mars 2012

EXERCICE N : 1 (4 points)

A) On considère un dé cubique homogène dont les faces sont numérotées : 0 , 0 , - 1 , 1 , 1 , 1 .

On lance le dé deux fois de suite on notera par **a** le résultat du premier lancée et par **b** celui du deuxième . Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct ($O ; \vec{u} ; \vec{v}$) .

On considère la transformation **f** du plan , qui à tout point d'affixe Z , associe le point M' d' affixe : $Z' = (\mathbf{a} + i\,\mathbf{b})Z + i\,\mathbf{b}$.

1) On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles .

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « f est une symétrie centrale » ; B : « f est une translation »

C : « f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ »

D : « f est une similitude directe de centre Ω (- 1 , 0) »

2) Soit l'évènement : **E = D / C** . Montrer que P (**E**) = $\frac{3}{4}$.

B) On considère deux urnes U_1 et U_2 tels que : $\begin{cases} U_1 \text{ contient } 3 \text{ boules blanches et } 2 \text{ boules noires} \\ U_2 \text{ contient } 1 \text{ boules blanche et } 4 \text{ boules noires} \end{cases}$

On lance le dé deux fois de suite :

- Si l'évènement **E** est réalisé , on tire simultanément trois boules de U_1 .
- Si l'évènement **E** n'est pas réalisé , on tire successivement et sans remise trois boules de U_2 .

On désigne par G et F les évènements suivants :

G : « tirer trois boules de la même couleur » ; F :« Tirer deux boules blanches et une boule noire »

1) Calculer P (G) et P (F) .

2) On donne H : « Tirer deux boules noires et une boule blanche » .

a) Faite un arbre de probabilité qui modélise la situation .

b) Déduire que $P(\overline{\mathbf{E}} / \overline{\mathbf{H}}) = \frac{4}{25}$.

EXERCICE N : 2 (4 points)

A) Dans le plan orienté , on considère un losange ABCD tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$.

On désigne par $E = S_C(A)$, $F = S_B(A)$, **R** la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$,

S la similitude directe qui transforme D en E et C en F et par $\mathbf{h} = \mathbf{S} \circ \mathbf{R}^{-1}$.

© 2012 www.devoir@t.net

1) a) *Déterminer* **h** *(C) et* **h** *(B) .*

b) *En déduire que* **h** *est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport .*

c) *Déterminer alors les éléments caractéristiques de* **S** *.*

B) *Soit* σ *la similitude indirecte telle que* $\sigma(E) = C$ *et* $\sigma(F) = B$ *.*

1) a) *Déterminer le rapport de* σ *.*

b) *En déduire que* σ *admet un unique point invariant qu'on notera* Ω *.*

2) *On désigne par* Δ *l'axe de la similitude* σ *et par G le point d'intersection des droites* Δ *et (CE).*

a) *On pose :* $G' = \sigma(G)$ *, montrer que* $\overrightarrow{\Omega G'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega G}$ *.*

b) *Montrer que* $(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{\Omega G}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{\Omega G}})\ [2\pi]$ *.*

c) *Déduire que les droites* Δ *et (EF) sont parallèles .*

3) *Soit* $E' = S_{\Delta}(E)$*.*

a) *Montrer que G est le centre de gravité du triangle* $\Omega EE'$ *et déduire que* $\overrightarrow{GE} = -2\,\overrightarrow{GC}$ *.*

b) *Construire alors le point G , l'axe* Δ *et le centre* Ω *de* σ *.*

<u>*EXERCICE N : 3*</u> *(4 points)*

1) a) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* **(E)** *:* $6X - 5Y = 7$ *.*

b) *Déterminer alors les solutions dans* $\mathbb{Z}$ *du système suivant :* $\begin{cases} n \equiv 2[6] \\ n \equiv 9[5] \end{cases}$

c) *Déterminer les solutions dans* $\mathbb{Z}^2$ *de l'équation :* $(6X - 5Y - 6)(6X - 5Y + 6) = 13$ *.*

2) *On considère dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation (E') :* $6X^2 - 5Y^2 = 7$ *.*

a) *Montrer que si (X , Y) est une solution de* **(E')** *alors* $X^2 \equiv 2\ [5]$ *.*

b) *Quel est alors l'ensemble des solutions de* **(E')** *?*

3) *On considère dans* $\mathbb{Z}^3$ *l'équation* **(E'')** *:* $6X - 5Y - 4Z = 7$ *.*

a) *Montrer que Y est impair .*

b) *On pose :* $Y = 2p + 1$ *;* $(p \in \mathbb{Z})$ *.Montrer que* $(Z + p)$ *est un multiple de 3 .*

c) *On pose* $Z + p = 3q$ *;* $(q \in \mathbb{Z})$ *.*

Montrer que (X , Y , Z) solution de **(E'')** *si et seulement si* $\begin{cases} Y = 2p+1 \\ Z = 3q - p \\ X = p + 2q + 2 \end{cases} \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2$

d) *Retrouver alors les solutions de* **(E)** *.*

www.devoir@t.net © 2012

EXERCICE N : 4 (*8 points*)

A) Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞[par : $\begin{cases} f(x) = (e^{-x} - 1)\ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par **(Cf)** la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) .

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

2) Soit g la fonction définie sur] 0 ; + ∞[par : $g(x) = e^{x} - 1 + x\ln x$.

a) Montrer que l'équation g'(x) = 0 admet dans] 0 ; + ∞[une unique solution $\alpha \in]0.1 ; 0.2[$.

b) Déduire le signe de g'(x) sur] 0 ; + ∞[.

3) a) Dresser le tableau de variations de g .

b) Déduire que l'équation g (x) = 0 admet dans] 0 ; + ∞[une unique solution $\beta \in]0.3 ; 0.31[$.

4) a) Prouver que f '(x) prend le signe de - g(x) sur] 0 ; + ∞[.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Tracer la courbe **(Cf)** (On prend : $\beta \approx 0.3$) .

B) Soit $\lambda \in]0 ; 1[$. On pose $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(t)\,dt$ et pour tout $n \in IN^*$, $I_n(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} t^n \ln t\,dt$.

1) a) A l'aide d'une intégration par parties , calculer $I_n(\lambda)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I_n(\lambda) = \dfrac{-1}{(n+1)^2}$.

2) Pour tout $t \in [0 ; 1]$,on pose : $\varphi_0(t) = 1$ et pour tout $n \in IN^*$, $\varphi_n(t) = 1 - \dfrac{t}{1!} + \dfrac{t^2}{2!} \ldots\ldots + \dfrac{(-t)^n}{n!}$.

a) Montrer que tout $n \in IN^*$, $\varphi'_{n+1}(t) = -\varphi_n(t)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout $n \in IN^*$, $\int_0^x \varphi_n(t)\,dt = 1 - \varphi_{n+1}(x)$.

c) $t \in [0 ; 1]$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $\varphi_{2n+1}(t) \le e^{-t} \le \varphi_{2n}(t)$.

d) En déduire que tout $n \in IN^*$, $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k!} I_k(\lambda) \le A(\lambda) \le \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^k}{k!} I_k(\lambda)$.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par **(Cf)** et les droites d'équations : x = 0 , x = 1 et y = 0 .

a) Soit F une primitive de f sur [0 ; + ∞[. Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de $F(\lambda)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = \mathcal{A}$.

c) Montrer que tout $n \in IN^*$, $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)^2} \le \mathcal{A} \le \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)^2}$.

d) Donner un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieur à 10^{-3} .

www.devoir@t.net © 2012