

Devoir de synthèse N1

Exercice1 : (3 points) Répondre par vrai ou faux

- 1) Si (U_n) est une suite décroissante et converge vers 0 alors les suites (U_n) et $(-U_n)$ sont adjacentes
- 2) La suite réelle définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + n$ est une suite arithmétique
- 3) Pour tous réels a, b on a $|\cos(2a) - \cos(2b)| \leq 2|a - b|$
- 4) Deux antitélacements qui fixent un même point sont égaux

Exercice2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Soit l'application f de $\mathbb{C} \setminus \{A\}$ dans \mathbb{C} qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$$z' = \frac{z-1+2i}{z-1} \text{ et soit les points } A \text{ et } B \text{ d'affixes respectives } 1 \text{ et } 1-2i$$

- 1) Montrer que f admet deux points invariants I et J qu'on précisera les affixes
- 2) Montrer que pour tout $M \neq A$, $f \circ f(M) = M$
- 3) a) Montrer que $OM' = \frac{BM}{AM}$ et déduire l'image de la médiatrice de $[AB]$ par f
 b) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$ et déduire l'image du cercle de diamètre $[AB]$ privé de A
- 4) a) Calculer $(z'-1)(z-1)$ et déduire que $AM' \cdot AM = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 b) Soit M un point d'affixe $1 + e^{i\alpha}$ où α est un réel donné, construire son image M' par f

Exercice 2 : (3 points)

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe on donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant $f(0) = \frac{1}{4}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

- 1) Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[-1, 1]$
- 2) Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{R} par $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [-1, 1]$
 b) Montrer que pour tout n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
 c) Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

$$3) \text{ Soit } V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout n , $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq V_n \leq f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et déduire la limite de (V_n)

Exercice4 : (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct .Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Soit O , I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[OB]$ et $[BC]$ et soit D le symétrique de O par rapport à (BC) et N le point d'intersection de (AD) et (BC) . **Voir figure 2**

1) Montrer que I est le milieu de $[AD]$

2)a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme A en C et O en D

b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $\frac{-\pi}{2}$

c) Soit $I' = f(I)$ montrer que I' est le milieu de $[BD]$

d) Dédurre que les points O , N et I' sont alignés

3) Soit $g = f \circ R$ où R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer $g(O)$ et caractériser g

4) Soit $h = S \circ f^{-1}$ où S est la symétrie orthogonale d'axe (AO)

a) Déterminer $h(D)$ et $h(C)$

b) Montrer que h est une symétrie glissante et préciser ses éléments caractéristiques

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que $h(M) = f^{-1}(M)$

Exercice 5 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle J que l'on précisera

3) Construire dans le même repère les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$

4) soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f(\tan(x))$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $g(\frac{\pi}{2}) = -1$

a) Montrer que g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

b) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) = \cos(2x)$

c) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$

d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $] -1, 1 [$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in] -1, 1 [$

e) Soit $G(x) = g^{-1}(-x) + g^{-1}(x)$ pour tout $x \in] -1, 1 [$. Montrer que G est dérivable sur $] -1, 1 [$ et préciser $G'(x)$

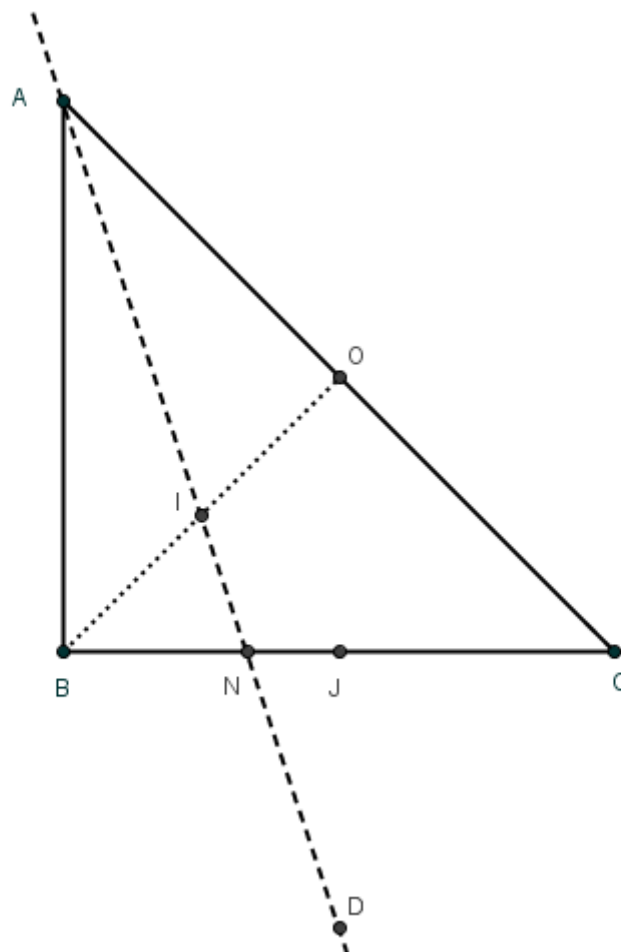
f) Montrer que $G(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in] -1, 1 [$. Que peut on conclure pour $C_{g^{-1}}$?

Figure 1 : (Ex2)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2

Arrows in the original image indicate the mapping from the x-axis to the f(x) axis: from $-\infty$ to 2 , from -1 to $-\frac{1}{2}$, from 1 to $\frac{1}{2}$, and from $+\infty$ to -2 .

Figure 2 : (Ex 4)



Correction du DS1

Exercice 1 : 1)V 2)F 3)V 4) F

Exercice 2 :

1) Soit M un point d'affixe z et invariant par f, $f(M) = M \text{ sig } z = \frac{z-1+2i}{z-1} \text{ sig } z(z-1) = z-1+2i \text{ sig } z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$

On a $\Delta = 4.2i = (2(1+i))^2$ et les solutions $z_1 = -i$ et $z_2 = 2+i$ ainsi il y a deux points invariants I(-i) et J(2+i)

2) Soit $M \neq A$, $M(z) \xrightarrow{f} M_1(z_1) \xrightarrow{f} M'(z')$ on a $z_1 = \frac{z-1+2i}{z-1}$ et $z' = \frac{z_1-1+2i}{z_1-1}$ d'où $z' = \frac{\frac{z-1+2i}{z-1} - 1 + 2i}{\frac{z-1+2i}{z-1} - 1} = \frac{2iz}{2i} = z$

3a) On a $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$ d'où $|z'| = \left| \frac{z-1+2i}{z-1} \right|$ d'où $OM' = \frac{BM}{AM}$ et ainsi M ∈ med [AB] eq $OM' = 1$ eq $M' \in C(O, 1)$

b) on a $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$ d'où $\arg(z') \equiv \arg\left(\frac{z-1+2i}{z-1}\right) [2\pi]$ eq $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$

ainsi $M \in C([AB]) \setminus \{A\}$ eq $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ ou $M = B$ eq $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $f(B) = O$ eq $M \in (o, \vec{v})$

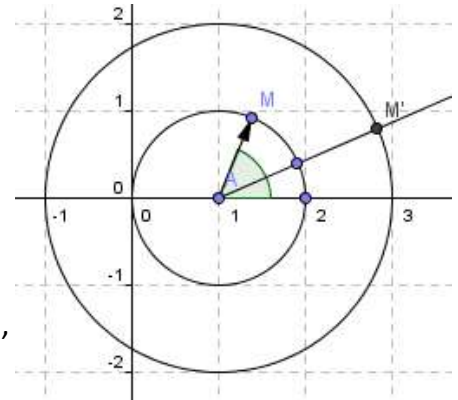
4a) $(z'-1)(z-1) = \left(\frac{z-1+2i}{z-1} - 1\right)(z-1) = 2i$ Ainsi $(z'-1)(z-1) = 2i$

eq $|(z'-1)(z-1)| = |2i|$ et $\arg((z'-1)(z-1)) \equiv \arg(2i) [2\pi]$

D'où $AM' \cdot AM = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

b) M a pour affixe $1 + e^{i\alpha}$ donc $z-1 = e^{i\alpha}$ donc $M \in C(A, 1)$

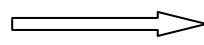
d'après 4)b) $AM' = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi]$ d'où la construction de M'



Exercice 3 :

1) Soit $g(x) = f(x) - x$ on a g est dérivable sur $[-1,1]$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $|f'(x)| < \frac{1}{2}$, $g(-1) = \frac{1}{2}$, $g(1) = -\frac{1}{2}$

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} g \text{ est continue sur } [-1,1] \\ g(-1).g(1) < 0 \\ g \text{ est strictement décroissante sur } [-1,1] \end{array} \right.$



l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α

dans $[-1, 1]$

2a)* pour $n = 0, U_0 = \frac{1}{4} \in [-1, 1]$

* On suppose que $U_n \in [-1,1]$ (pour $n \in \mathbb{N}$) donc $f(U_n) \in f([-1,1])$ or $f([-1,1]) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset [-1,1]$ donc $f(U_n) \in [-1,1]$

Ainsi $U_{n+1} \in [-1,1]$

b) On a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1] \iff |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \iff |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c) On déduit que pour tout $n, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{4} - \alpha\right|$ d'où (U_n) converge vers α (car $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$)

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier k entre 1 et n on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{n}{n^2}$ et comme f est croissante sur $[-1,1]$

On déduit que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq f\left(\frac{n}{n^2}\right)$ d'où $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $nf\left(\frac{1}{n^2}\right) < nV_n < nf\left(\frac{1}{n}\right)$

Et par suite $f\left(\frac{1}{n^2}\right) < V_n < f\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = f(0) = \frac{1}{4}$ (f est continue en 0)

Exercice 4 :

1) O et D sont symétriques par rapport à (BC) donc $J=B * C$ donc $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}$ donc $A * D = B * O$

2) a) On a $AO = CD$ en effet $AO = CO = CD$ donc il existe un seul déplacement $f / f(A) = C$ et $f(O) = D$

b) L'angle du déplacement f est $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$

donc f est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ Comme $BA = BC$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$ Donc B est le centre de f

c) on a $I = B * O$ donc $f(I) = f(B) * f(O) = B * D$

d) Dans le triangle OBD / (BJ) et (DI) sont deux médianes donc leur point d'intersection N est le centre de gravité de OBD et comme $I' = B * D$ donc O, N et I' sont alignés

3) $g(O) = f \circ R(O) = f(O) = D$, g est la composée de deux rotations dont la somme des angles est 0 donc $g = t_{\overrightarrow{OD}}$

4) a) $h(D) = S \circ f^{-1}(D) = S(O) = O$ et $h(C) = S \circ f^{-1}(C) = A$

b) $\text{med}[DO] \neq \text{med}[CA]$ donc h est une symétrie glissante d'axe (JO) et de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{Dh(D)} = \overrightarrow{DO}$ ($D \in (JO)$)

c) $h(M) = f^{-1}(M)$ eq $S(f^{-1}(M)) = f^{-1}(M)$ eq $f^{-1}(M) \in (AO)$ eq $M \in f(AO)$ eq $M \in (CD)$

Exercice 5:

1) f est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} > 0$ sur \mathbb{R}^{*+}

$f'(x)$	-
f	1

-1

2) f est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R}^+

Donc elle réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur $f(\mathbb{R}^+) =]-1, 1]$

4) la fonction tangente est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et f est continue sur \mathbb{R}^+ donc $g = h \circ \tan$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et g est

continue en $\frac{\pi}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

b) $g(x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos(2x)$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = -1 = g(\frac{\pi}{2})$

c) g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $g'(x) = -2\sin(2x) < 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc g est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ Donc elle réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$

d) g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc g^{-1} est dérivable sur $g(]0, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[$

et pour tout $x \in]-1, 1[$

