Lycée Thèlèpte	**DEVOIR DE CONTROLE N°2**
Niveau ----------- 4 ème Maths	Mathématiques
Prof -------- hafsi Salem	2 heures

Exercice1 :(6pts)

1) Démontrer les propositions suivantes.

a) $2^{340} \equiv 1 \bmod(11)$

b) Pour tout entier naturel n , 9 divise $7^{3n} - 1$.

c) Pour tout entier naturel n, $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

2) **a)** donner suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.

b) En déduire que si n est pas multiple de 3 alors $2^{n+2} + 2^{n+1} + 1$ est divisible par 7.

Exercice2 :(7pts)

Soit f la fonction définie sur [0,1[par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **a)** Montrer que f réalise une bijection de [0,1[sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer, à l'aide une intégration par partie que

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

2) Soit $F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}\,dt$; $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et calculer F'(x).

b) En déduire que $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$.

c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ puis $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx$.

3) Sur la feuille annexe ci–jointe, on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de f^{-1} (où f^{-1} est la fonction réciproque de f).

a) Construire dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_f).

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice3 :(7pts)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2 OC et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose I = O * A, J = B * C et L = I * J. La perpendiculaire menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en un point D. Soit S la similitude directe telle que S(O) = I et S(A) = J. (Voir feuille annexe)

1) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.

2) Déterminer S(B) en utilisant les images des droites (OB) et (AB) par S.

3) Construire alors le point E = S(C)

4) Soit Ω le centre de S

a) Montrer que $S \circ S = h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}$

b) Montrer que S∘S(O)= L. En déduire que $\Omega \in (OL)$

c) Soit H = I * D. Montrer que S∘S(I)= H. En déduire que $\Omega \in (IH)$ et construire Ω.

5) Soit σ la similitude indirecte de centre Ω et telle que $\sigma(I) = O$.

a) Déterminer le rapport de σ.

b) Construire l'axe Δ de σ.

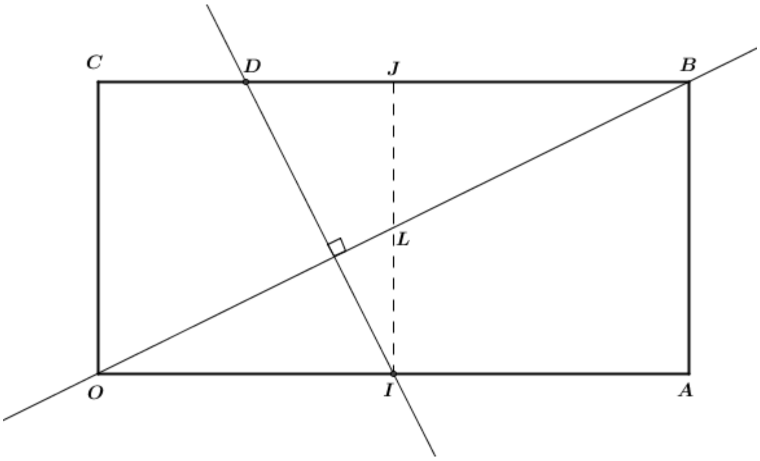
c) Soit K le symétrique de Ω par rapport à I.

Montrer que Δ est la médiatrice du segment [OK].

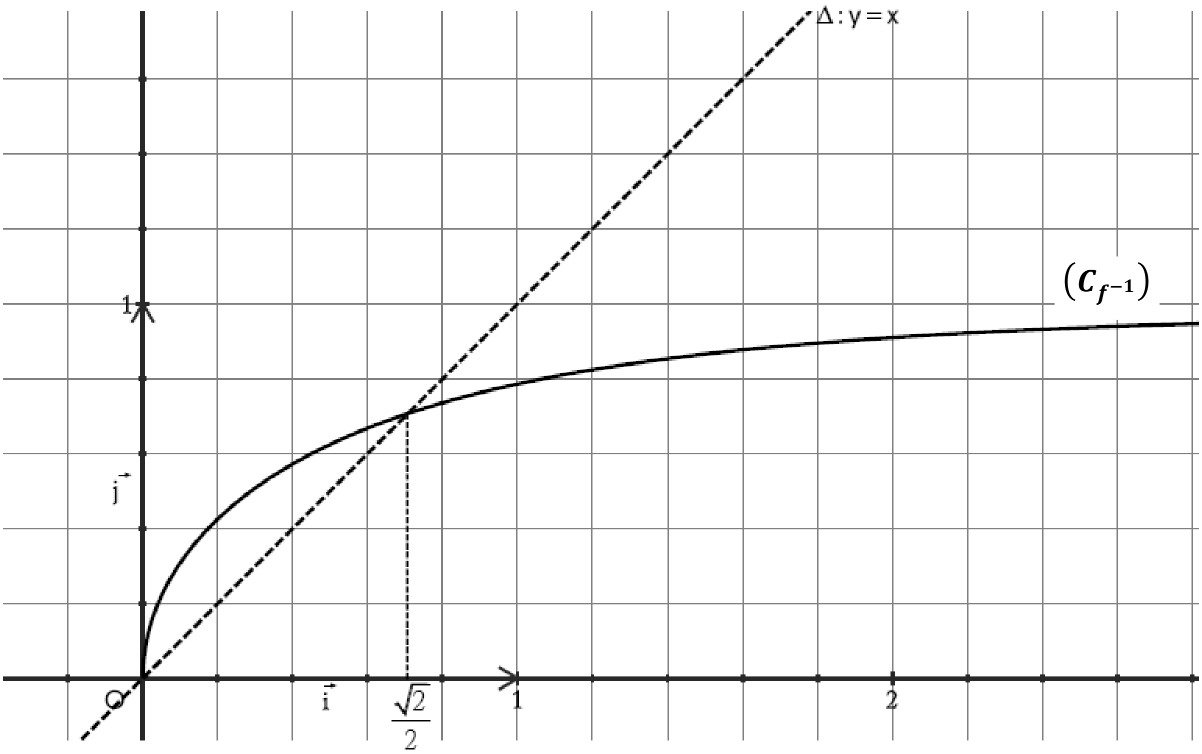
Bon Travail

Feuille Annexe

Exercice 3



Exercice 2



CORRECTION

Exercice1 :

1) Montrons que $2^{340} \equiv 1 \bmod(11)$.

$2^5 = 32 \equiv -1(\bmod 11) \Longrightarrow 2^{340} = (2^5)^{68} \equiv (-1)^{68}(\bmod 11)$

Ainsi $2^{340} \equiv 1 \bmod(11)$.

2) Montrons que pour tout entier naturel n , 9 divise $7^{3n} - 1$.

$7^3 = 343 = 38 \times 9 + 1 \Longrightarrow 7^3 \equiv 1(\bmod 9) \Longrightarrow 7^{3n} \equiv 1(\bmod 9)$.

3) Montrons que pour tout entier naturel n, $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

$4^4 = 256 \equiv 3(\bmod 11) \Longrightarrow 4^{4n} \equiv 3^n(\bmod 11)$.

$4^2 = 16 \equiv 5(\bmod 11)$, $3^3 = 27 \equiv 5(\bmod 11)$

donc $4^2 \equiv 3^3(\bmod 11)$.

On a donc $\begin{cases} 4^{4n} \equiv 3^n(\bmod 11) \\ 4^2 \equiv 3^3(\bmod 11) \end{cases} \Longrightarrow 4^{4n} \times 4^2 \equiv 3^n \times 3^3(\bmod 11)$.

Ainsi $4^{4n} - 3^n \equiv 0(\bmod 11)$.

4) **a)** $2^0 \equiv 1(\bmod 7)$, $2^1 \equiv 2(\bmod 7)$, $2^2 \equiv 4(\bmod 7)$, $2^3 \equiv 1(\bmod 7)$, $2^4 \equiv 2(\bmod 7)$ …

Si $n \equiv 0(\bmod 3)$ $2^n = 2^{3p} = (2^3)^p \equiv 1(\bmod 7)$

Si $n \equiv 1(\bmod 3)$ $2^n = 2^{3p+1} \equiv 2(\bmod 7)$

Si $n \equiv 2(\bmod 3)$ $2^n = 2^{3p+2} \equiv 4(\bmod 7)$

b) Si n est multiple de 3 alors

$2^{n+2} + 2^{n+1} + 1 \equiv (4 + 2 + 1)(\bmod 7) \equiv 0(mod\ 7)$

Exercice2 :

1) **a)** f est dérivable sur [0,1[et $\forall x \in [0,1[$,

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x^2}{\sqrt{1-x^2}^2} = \dfrac{2x(1-x^2)+x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x-x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0 \ \forall x \in [0,1[$. f est strictement $\nearrow$ sur [0,1[

donc f réalise une bijection de [0,1[sur $f([0,1[) = [f(0), \lim_{1^-} f[$

$= [0, +\infty[$

b)

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.\text{ On pose } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx = \left[-x\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$$

2)

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

a) $x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\sin\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1] \supset \left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ donc F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

et $\forall\, x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $F'(x) = \cos x\sqrt{1-sin^2x} = \cos x|\cos x| = \cos^2 x$ puisque $x > 0$.

b) $\forall\, x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $F'(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) + c, c \in IR$

$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$ or $F(0) = 0$ donc $c = 0$

c)

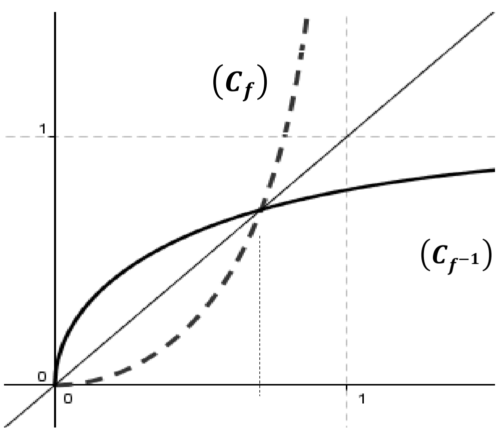
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}dt = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

3) b) Soit **A** l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\boldsymbol{A} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x - f(x))dx = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\,dx - 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx = 2 \times \frac{1}{4} - 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

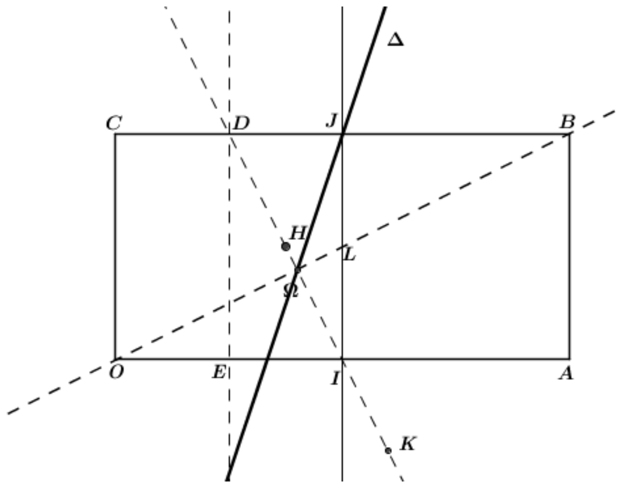
$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

3)a)



$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice3



1) $\begin{cases} S(O) = I \\ S(A) = J \end{cases}$, $k = \frac{IJ}{AO} = \frac{1}{2}$, $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{IJ}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2) $\{B\} = (OB) \cap (BC) \Rightarrow \{ S(B) \} = S((OB)) \cap S((BA))$.

Or S ((OB)) est la perpendiculaire à (OB) passant par S(O)=I qui est (ID)

S ((BA)) est la perpendiculaire à (BA) passant par S(A)= J qui est (BC).

Ainsi $\{S(B)\} = (ID) \cap (BC) = \{D\}$.

De même $\{S(C)\} = S((OC)) \cap S((BC)) = (OA) \cap \delta$ où δ est la perpendiculaire à (BC) passant par S(B) = D.

3) Voir figure

4) a) $S \circ S$ est une similitude de rapport $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et d'angle $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ et par suite $S \circ S = h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}$.

b) $S \circ S(O) = S(I)$, or $I = O * A \Rightarrow S(I) = S(O) * S(A) = I * J = L$

$S \circ S(O) = h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}(O) = L \Rightarrow \overrightarrow{\Omega L} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega O} \Rightarrow \Omega \in (OL)$.

c) $S \circ S(I) = S(L)$, or $L = O * B \Rightarrow S(L) = S(O) * S(B) = I * D = H$

$S \circ S(I) = H$ alors $h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}(I) = H \Rightarrow \overrightarrow{\Omega H} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega I} \Rightarrow \Omega \in (IH)$.

Ainsi $\Omega \in (IH) \cap (OL)$.

5) a) Soit k' le rapport de σ. $k' = \frac{\Omega O}{\Omega I} = 2$.

b) On a $\sigma(I) = O$ alors Δ est la bissectrice de l'angle $\widehat{O\Omega I}$.

c) On a $\Omega O = 2\Omega I$ et $\Omega K = 2\Omega I$ car $S_I(\Omega) = K$,

$\Omega O = \Omega K$ implique $\Delta = \text{med } [OK]$.

Fin