

Exercice1 :(3points)

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse.

1. Soit x un entier relatif. Si $x \equiv 1 \pmod{4}$ alors $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$.
2. Le reste modulo 17 de 2012^{32} est égale à 1.
3. Pour tout entier naturel n , $7^{3n} - 1$ est divisible par 9.
4. $2 \times 35^{2006} - 3 \times 84^{2007} \equiv 6 \pmod{17}$

Exercice3 :(6points)

On considère un carré ABCD de centre I et de sens direct.

On pose $J = A * D$, $K = C * D$ et $C' = S_D(C)$.

On désigne par R_B et R_D les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs B et D.

- 1.a. Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A) = C$ et $\varphi(B) = D$.
b. Caractériser φ .
2. Soit l'application $f = R_D \circ \varphi \circ R_B$.
a. Déterminer $f(B)$.
b. Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.
3. On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$.
a. Déterminer $g(C)$ et $g(D)$.
b. En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.
- 4.a. Montrer que $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = f$.
b. En déduire que $S_K \circ S_{(IJ)} = S_{(AD)} \circ f$, où S_K est la symétrie centrale de centre K.
c. Déterminer alors la forme réduite de $S_{(AD)} \circ f$.

Exercice3 :(5points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

On a représenté dans la feuille annexe (page2 sur 2) la courbe représentative (\mathcal{C}) de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1.a. **Par une lecture graphique**, Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b. Déterminer $f^{-1}(1)$.
c. Tracer la courbe (\mathcal{C}') de f^{-1} dans le même repère.
d. Expliciter $f^{-1}(x)$, pour tout $x \in J$.
2. Soit F la primitive de f sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0.

On considère la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = F(\sin^2 x)$.

- a. Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$, pour tout $x \in J$.
- b. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x$.
- c. Calculer alors $F(\frac{1}{2})$.

Exercice4 :(6points)

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, 0]$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + \tan(x)}$.

1.a. Dresser le tableau de variation de f .

b. Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{4}, 0]$ sur $[1, +\infty[$.

2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2x^2 - 2x + 1}$.

3. Soit φ la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = f^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{ si } x < 0 \\ \varphi(0) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$
.

a. Montrer que φ est continue à gauche en 0.

b. Montrer que φ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2 + 1}$.

b. Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty, 0[$.

Montrer qu'il existe un réel c de $]x, 0[$ tel que $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{-1}{(c-1)^2 + 1}$

En déduire que φ est dérivable à gauche en 0 et déterminer $\varphi'_g(0)$.

4. Dresser le tableau de variation de φ et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On précisera la demi tangente à (Γ) au point d'abscisse 0).

Exercice3:

Non :

Prénom :

N° :

