Lycée pilote **Mr : BEN ALI N.**
Gafsa

Devoir de contrôle N° 2
4ième Maths

EXERCICE 1 : (2 pts)

Interpréter chacune des propositions suivantes :

1) La composée de deux homothéties de centres différents et de rapports k et 1/k est une translation.
2) La composée d'une translation et d'une homothétie est une similitude directe d'angle nul.
3) Toute similitude directe d'angle non nul (modulo 2π) admet un seul point invariant.
4) Toute similitude directe d'angle nul (modulo 2π) admet un seul point invariant.

EXERCICE 2 : (6 pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O.
On désigne par J le milieu de [AB].
M est un point variable de la droite (D) perpendiculaire en A à (AB).
La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M'.

1- Soit s la similitude directe de centre O telle que s(A)=B.
a- Montrer que, pour tout point M de (D), s(M)=M'.
b- En déduire que, lorsque M décrit (D), le triangle OMM' reste semblable à un triangle fixe que l'on précisera.
2- a- Montrer que, pour tout point M de (D), le point I milieu de [MM'] est l'image de M par une similitude S de centre O et dont on précisera le rapport et l'angle.
b- Soit H le projeté orthogonal de O sur (D).Déterminer S(H).
c- Déterminer l'ensemble des points I lorsque M décrit (D).
3- Pour tout point M de (D) distinct de A, on désigne par P le point tel que MAM'P est un rectangle. Déterminer l'ensemble des point P lorsque M décrit (D)\{A}.

EXERCICE 3 : (4,5 pts)

z étant un nombre complexe, on pose $f(z) = z^3 - 4iz^2 - (6+i)z + 3i - 1$

1- Démontrer que l'équation f(z) = 0 admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on calculera.
2- En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 de l'équation f(z) = 0
3- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives i, $-1+i$ et $1+2i$.
a- Placer M_0 , M_1 et M_2
b- Démontrer qu'il existe une similitude directe unique φ de centre M_0 qui transforme M_1 en M_2 . Donner une mesure de l'angle et le rapport de cette similitude. Déterminer l'application complexe associée à φ.

EXERCICE 4 : (7,5 pts)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x+1+\ln x$

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une seule solution α et que $0,27 < \alpha < 0.28$.
3. En déduire le signe de g(x).

B. Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 ; interpréter graphiquement le résultat.

   a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

   b. Dresser le tableau de variation de f

   c. Vérifier que : $f(\alpha) = -\alpha$

   d. Déterminer les points d'intersections de C_f et l'axe $(O,\vec{i})$.

   e. Tracer C_f et préciser la demi- tangente au point d'abscisse nulle.
   (unité graphique :4 cm ;)
   Montrer que f est bijective de $[\alpha,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

   a. Vérifier que $f^{-1}(0) = 1$ et $(f^{-1})'(0) = 2$

   b. Ecrire une équation de la tangente T à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse nulle.

   c. Tracer $C_{f^{-1}}$ et T dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.