Lycée Pilote Kairouan Année Scolaire 2009-10		Prof : Troudi Kamel Devoir de Synthèse N°2	
2-3-2010	Classe : $4^{\text{ième}}$ Math$_1$	Mathématiques	Durée:4 heures

Exercice N°1 (3 points)

I

Pour chaque question, il y a exactement une proposition correcte. L'élève doit choisir en justifiant sur sa copie la proposition vraie.

1) L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient $\mathscr{C}=\left\{M(x,y,0) \text{ tels que } y=\dfrac{\sqrt{3}\,x}{x^3+1} \text{ et } 0\le x\le \alpha\,;(\alpha>0)\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses. Le volume de S est :

a) ☐ $\dfrac{\alpha^3\pi}{\alpha^3+1}$ b) ☐ $\dfrac{3\pi}{\alpha^3+1}$ c) ☐ $\dfrac{3\alpha^2}{(\alpha^3+1)^2}$

2) $f : M(z) \longrightarrow M'(z')$ tel que $z'=-5(1-i)z+i$

a) ☐ f est une similitude indirecte

b) ☐ f est une similitude directe d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$

c) ☐ f est une similitude directe d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

II

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

1) **Proposition** : « Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $7^n \equiv 5^n+2^n (10)$. »
2) **Proposition** : «Pour tout $p\in\mathbb{N}$ premier, $6^{p-1}\equiv 1(p)$ »
3) **Proposition** «La fonction définie sur IR par :$F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt$ est impaire »

Exercice N°2 (3 points)

I Pour tout entier n, on pose a = 5n+4 et b = 3n+1.

1) Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 7.
2) En déduire, suivant les valeurs de n, la valeur de $a\wedge b$.
3) Déterminer $a\wedge b$ lorsque $a = 5\times(2010)^{2009}+4$ et $b=3\times(2010)^{2009}+1$.

II

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 3x – 5y = 1
2) En déduire les solutions des équations:
   a) 3x – 5y = 2
   b) 3x – 5y = 7 et $x\wedge y=7$
3) On considère le système (S): $\begin{cases} 2x+1\equiv 0(\text{mod } 3)\\ 6x\equiv 3(\text{mod } 5)\end{cases}$

a) Montrer que x est une solution de (S) si est seulement si il existe $(u, v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases}3u-5v=2\\ x=1+3u\end{cases}$

b) En déduire les solutions de (S)

c) Déterminer la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 7

Exercice N°3 (4 points)

ABCD est un carré direct de centre O et de coté 2. $I = A * B$ et $J = A * D$

A) 1) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que $f(D) = O$ et $f(C) = I$

b) Donner l'angle et le rapport de f. Construire le centre Ω de f

2) a) Déterminer $f((BD))$ et $f((BC))$. En déduire $f(B)$ et montrer que $f(A) = J$

b) Caractériser $f \circ f$. En déduire que Ω est le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(J, 4)$

3) Soit g la similitude indirecte telle que : $g(D) = O$ et $g(C) = I$

a) Montrer que $g = S_{(OI)} \circ f$; puis déterminer $g(B)$

b) Donner la forme réduite de g

B) Dans cette partie on garde uniquement de la partie A/, les données que f et g sont des similitudes respectivement directe et indirecte qui transforment D en O et C en I

1) a) Vérifier que $R = \left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan P

b) Déterminer l'affixe de chacun des points C, D, O et I

2) a) Déterminer l'expression complexe de f

b) Retrouver le rapport et l'angle. Donner l'affixe du centre Ω de f

3) a) Soient les points $M(z)$ et $M'(z')$. Montrer que $g(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{-1}{2} i\bar{z} + 2 + i$

b) Retrouver les éléments caractéristiques de g

Exercice N°4 (4 points)

Soient f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0

2) On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$,par: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a) Justifier l'existence de F.

b) A l' aide d'une intégration par parties Montrer que: $F(x) = 2\sqrt{x}\ \ln(x+1) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

3) Soit H la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = \int_0^{\tan^2 x} \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $H'(x) = 4\tan^2 x$

b) Expliciter $H(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer alors $I = \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

4) a) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$; $f(x) \geq 0$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $x = 0,\ x = 1$ et $y = 0$.

Exercice N°5 (6 points)

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=2(x-1)-\ln x$

1) a)Etudier les variations de g

b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet comme racines 1 et α où $0,2<\alpha<0,25$

c) Déterminer alors le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x(\ln x)^2}{x-1} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} \\ f(0)=f(1)=0 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a)Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; interpréter le résultat graphiquement

c) Montrer que f est dérivable en 1 et donner l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en $A(1,0)$

d) Dresser le tableau de variation de f

3) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x)=f(x)-x+1$

a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ on a $\varphi'(x)=-\left(\dfrac{\ln x}{x-1}-1\right)^2$

b) En déduire la position relative de T et $\mathscr{C}$

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ par $h(x)=4x^2-4x$

a)Montrer que $f(\alpha)=h(\alpha)$. Etudier le sens de variation de h et déduire un encadrement de $f(\alpha)$

b) Tracer T et $\mathscr{C}$ (l'unité graphique est 2 cm)

B) Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par: $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

1) Montrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $f(t)\geq\dfrac{4(\ln t)^2}{t}$; En déduire que $F(x)\geq\dfrac{4}{3}(\ln x)^3$

2) Dresser le tableau de variation de F

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=F(n+1)-F(n)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)\leq U_n\leq f(n+1)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_n}{n}$