Lycée secondaire Kairouan **Devoir de contrôle n°2** Mars 2011	Classe : 4M1 Epreuve : Mathématiques Durée : 4heures

<u>EXERCICE N°1(3pts)</u>

Pour chacune des questions suivantes une seule proposition est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1) L'écriture complexe de la similitude indirecte de centre Ω (1+i) de rapport 3 et d'axe la droite Δ d'équation : y = - x + 2 est

   a-/ $z' = 3i\,\bar{z} + 1 + i$ b-/ $z' = -3i\bar{z} + +4i + 4$ c-/ $z' = 3i\,\bar{z} - 2i + 2$

2) Le domaine de définition de la fonction f : $x \longmapsto \ln(\ln(-\frac{1}{x}))$ est :

   a-/] -∞ , 0 [\ {-1} b-/] 1, 0 [c-/] -∞ , 0 [

3) Soit l'entier p = 2009^{2009} alors

   a-/ $p \equiv 0[3]$ b-/ $p \equiv 1[10]$ c-/ $p \equiv 0[7]$

4) On considère l'équation (E') : $x^2 + 5x - 2 \equiv 0\ [17]$

   a-/ Les solutions de (E') sont de la forme x = 17k + 13 ou x = 17k + 8 ; $k \in \mathbb{Z}$

   b-/ Les solutions de (E') sont de la forme x = 17k - 4 ou x = 17k - 8 ; $k \in \mathbb{Z}$

   c-/ Les solutions de (E') sont de la forme x = 17k - 13 ou x = 17k + 8 ; $k \in \mathbb{Z}$

<u>EXERCICE N°2 (3,5pts)</u>

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_1^e x(\mathrm{Log}\,x)^n\,dx$

1) Calculer I_1 au moyen d'une intégration par parties.

2) a-/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geq 0$.

   b-/ Montrer que (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

3) a-/ En utilisant une intégration par parties, démontrer que Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

   b-/ En déduire que Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

   c-/ Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE N°3 (5pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a-/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b-/ Préciser les branches infinies de (C).

c-/ Tracer la courbe (C).

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ Par $F(x) = \int_1^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

a-/ Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x) = 1$.

b-/ En déduire que $F(x) = x$ pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}$

3) a-/ Montrer que $\int_1^2 f(x)\,dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}\,dx$

b-/ Vérifier que pour tout $x \in IR$, $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

c-/ Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x= 2$

EXERCICE N°4 (4 pts)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul

1) On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs

a-/ Déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$

En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E)

b-/ Déterminer alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E).

2) On considère l'équation notée (G) : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs

a-/ Montrer que $100^n \equiv 2^n \pmod 7$

b-/ Démontrer que si (x, y) est solution de G alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod 7$

c-/ Reproduire et compléter le tableau suivant :

Le reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Le reste modulo 7 de $3x^2$							

d-/ Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7

En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

EXERCICE N°5 (4,5pts)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2 OC et

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose I = O * A , J = B * C et L = I * J

La perpendiculaire menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en un point D

Soit S la similitude directe telle que S(O) = I et S(A) = J

1°) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.

2°) Déterminer S(B) en utilisant les images des droites (OB) et (AB) par S.

3°) Construire alors le point E = S(C)

4°) Soit Ω le centre de S

a-/ Montrer que $S \circ S = h(\Omega, -\frac{1}{4})$.

b-/ Montrer que $S \circ S(O) = L$. en déduire que $\Omega \in (OL)$

c-/ Soit H = I * D. Montrer que $S \circ S(I) = H$. En déduire que $\Omega \in (IH)$ et construire Ω.

5°) Soit σ la similitude indirecte de centre Ω et telle que $\sigma(I) = O$.

a-/ Déterminer le rapport de σ.

b-/ Construire l'axe (Δ) de σ.

c-/ Soit K le symétrique de Ω par rapport à I.

Montrer que (Δ) est la médiatrice du segment [OK].