



*Le devoir comporte 3 pages Numérotées de 1/3 à 3/3*

*La page 3/3 est à rendre avec la copie*

### Exercice 1 ( voir annexe )

### Exercice 2

Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La courbe  $(c_f)$  d'une fonction  $f$  définie, continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

la droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote à la courbe  $(c_f)$

La courbe  $(c_f)$  admet une branche parabolique de direction  $(O, \vec{i})$  au voisinage de  $+\infty$

- 1) a) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- b) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = x$
- c) Etudier la position de  $(c_f)$  par rapport à la droite  $\Delta : y = x$ .
- 2) On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Représenter sur l'axe des abscisses :  $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1$  et  $v_2$

- 3) a) Montrer par récurrence que  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$
- b) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
- 4) a) Montrer par récurrence que  $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$
- b) En déduire que  $(v_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
- 5) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, 2[$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b) Construire la courbe  $(C)$ .
- 2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1, 2[$ .
- a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[1, 2[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

b) Tracer dans le même repère la courbe (C') de  $g^{-1}$  ( $g^{-1}$  étant la bijection réciproque de g)

c) Expliciter  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

3) Soit H une fonction dérivable sur  $]0,2[$  telle que pour tout  $x \in ]0,2[$   $H'(x) = f(x)$  et  $H(1) = 0$ .

On désigne par  $(U_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  par  $U_n = H(1 + \frac{1}{n}) - H(1 + \frac{1}{n+1})$ .

a) Déterminer la limite de  $(U_n)$

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  on a  $\frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+2}{n+1}) \leq U_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+1}{n})$

c) En déduire la limite de  $(n^2 U_n)$ .

#### Exercice 4

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

I) Soit l'équation (E) :  $z^2 - 2mz + 2 = 0$  avec m est un paramètre complexe non nul.

On pose  $M(m)$ ,  $M'(z')$  et  $M''(z'')$  où  $z'$  et  $z''$  sont les solutions de l'équation (E).

Sans calculer  $z'$  et  $z''$  montrer que :

1) M est le milieu du segment  $[M'M'']$ .

2)  $\arg(z') + \arg(z'') \equiv 0[2\pi]$  et que  $[OI)$  est la bissectrice de  $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''})$  avec  $I(1)$

II) Soit  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2z + 1 + e^{i2\theta} = 0$ .

2) On désigne  $M_1(1 - ie^{i\theta})$ ,  $M_2(1 + ie^{i\theta})$  et  $I(1)$

a) Montrer que  $S_I(M_1) = M_2$  ( $S_I$  la symétrie centrale de centre I).

b) Montrer que  $M_1$ ,  $M_2$  et O sont situés sur le cercle  $\zeta$  de rayon 1 et de centre que l'on déterminera

c) En déduire que le triangle  $OM_1M_2$  est rectangle en O.

d) Déterminer la valeur de  $\theta$  pour que le triangle  $OM_1M_2$  soit isocèle.

**BON TRAVAIL**

*Annexe à rendre avec la copie*

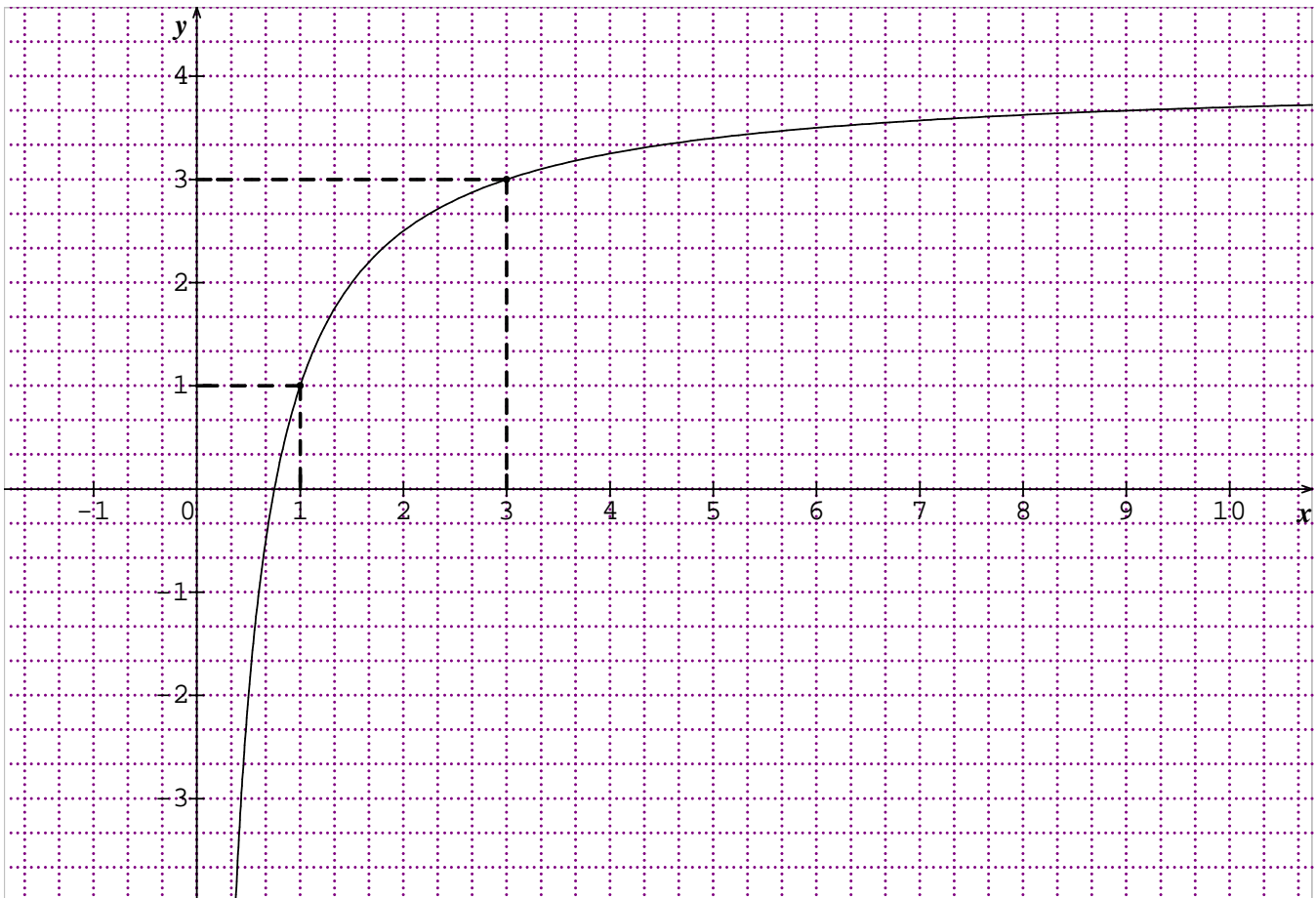
**Exercice 1**

Répondre par **vrai** ou **faux** sans aucunes justifications

$ABCD$  est un rectangle,  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[CD]$ .

- 1)  $S_{(AB)} \circ S_{(DC)} = t_{\overline{IJ}}$
- 2)  $S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_D$
- 3) Si  $f$  est une isométrie qui envoie  $A$  sur  $D$  et  $B$  sur  $C$  alors  $f(J) = I$
- 4) Si  $g$  est une isométrie tels que  $g(C) = D$  et  $g(D) = C$  alors :
  - i)  $g(J) = J$
  - ii)  $g \circ g = \text{Idp}$
  - iii)  $g = S_J$

**Exercice 2**



**Exercice 1 :**

1).Faux. 2). Faux. 3). Faux. 4).i).Vrai ii). Faux. iii).Vrai.

**Exercice 2 :**

1).a).

X	0	$+\infty$
f'(x)		+
f	$-\infty$	$+\infty$

.b).f(x)=x signifie x=1 ou x=3.

c).

X	0	1	3	$+\infty$	
f(x)-x	-	0	+	0	-
position	$(c_f)$ est en dessous de $\Delta$	$(c_f)$ est en dessus de $\Delta$	$(c_f)$ est en dessous de $\Delta$		

2). Voir annexe

3).a). Pour n=0 on a  $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$  (vrai).Supposons que  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$  et montrons que  $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$ On a  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$  et f est croissante sur  $[1 ; 3]$  donc  $f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$ Donc  $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$  .D'où  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 \forall n \in \mathbb{N}$ b).On a  $u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , donc  $(u_n)$  est croissante or  $(u_n)$  est majorée par 3 donc  $(u_n)$  est convergentevers un réel  $\alpha \in [1 ; 3]$  qui vérifie  $f(\alpha) = \alpha$  (car on a :  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $\alpha \in [1 ; 3]$  et f est continue en  $\alpha$  (car f est continue sur  $[1 ; 3]$ ))on a  $f(\alpha) = \alpha$  signifie  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 3$  or  $\alpha \geq u_0$  donc  $\alpha \geq 2$  alors  $\alpha \neq 1$  d'où  $\alpha = 3$ .4).a). Pour n=0 on a  $3 \leq v_1 \leq v_0 \leq 5$  (vrai).Supposons que  $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$  et montrons que  $3 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 5$ On a  $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$  et f est croissante sur  $[3 ; 5]$  donc  $f(3) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(5)$ Donc  $3 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 5$  .D'où  $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5 \forall n \in \mathbb{N}$

b). On a  $v_n \geq v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , donc  $(v_n)$  est décroissante or  $(v_n)$  est minorée par 3 donc  $(v_n)$  est convergente vers un réel  $\alpha' \in [3 ; 5]$  qui vérifie  $f(\alpha') = \alpha'$  (car on a :  $v_{n+1} = f(v_n)$  et  $(v_n)$  est convergente vers un réel  $\alpha' \in [3 ; 5]$  et  $f$  est continue en  $\alpha'$  (car  $f$  est continue sur  $[3 ; 5]$ ))

on a  $f(\alpha') = \alpha'$  signifie  $\alpha' = 1$  ou  $\alpha' = 3$  or  $1 \notin [3 ; 5]$  alors  $\alpha \neq 1$  d'où  $\alpha' = 3 = \alpha$ .

5). on a  $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , (car  $u_n \leq 3$  et  $v_n \geq 3$ ) et  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante et  $(u_n - v_n)$  converge vers  $3 - 3 = 0$ .

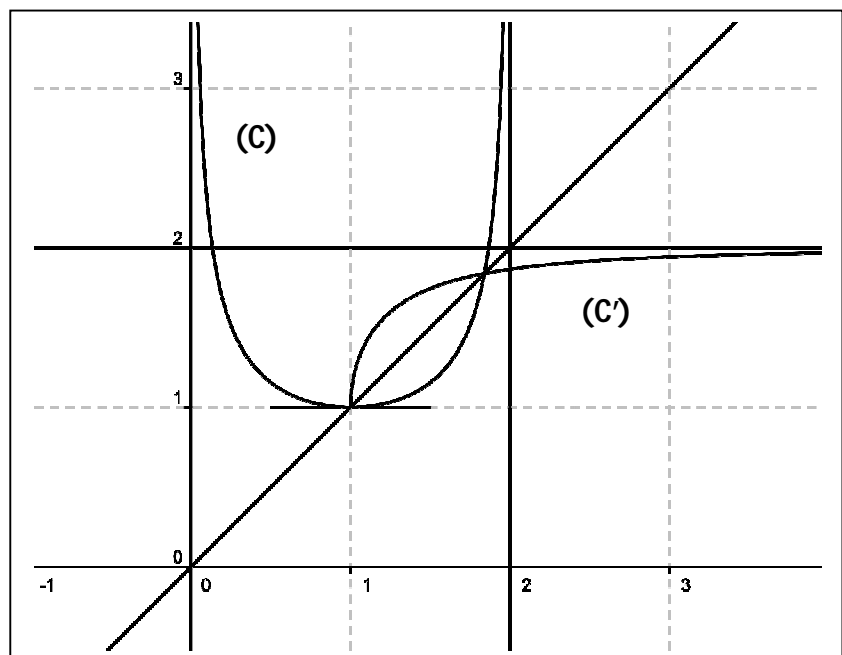
### Exercice 3:

1). a). La fonction  $x \mapsto 2x - x^2$  est dérivable sur  $]0 ; 2[$  et  $2x - x^2 > 0, \forall x \in ]0 ; 2[$ , donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$  est dérivable sur  $]0 ; 2[$ , or  $\sqrt{2x - x^2} \neq 0, \forall x \in ]0 ; 2[$ , alors  $f$  est dérivable sur  $]0 ; 2[$  et on a :

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{2x-x^2})'}{(\sqrt{2x-x^2})^2} = \frac{x-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \text{ d'où}$$

<b>X</b>	0	1	2
<b>f'(x)</b>	-	0	+
<b>f</b>	$+\infty$	1	$+\infty$

b).



2). a).  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]0 ; 2[$  donc  $g$  réalise une bijection de  $]0 ; 2[$

sur  $g(]0 ; 2[) = [1 ; +\infty[ = J$ .

b). Voir figure.

$$c). \begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in [1 ; +\infty[ \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} g(y) = x \\ y \in ]0 ; 2[ \end{cases} \text{ on a } g(y) = x \text{ signifie } x^2 y^2 - 2x^2 y + 1 = 0$$

$$\Delta = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \geq 0 \text{ donc } y = \frac{x^2 - \sqrt{x^2(x^2 - 1)}}{x^2} = 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \notin [1 ; +\infty[ \text{ ou } y = \frac{x^2 + \sqrt{x^2(x^2 - 1)}}{x^2} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \in [1 ; +\infty[$$

$$g^{-1}(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \quad \forall x \in [1; +\infty[.$$

$$3). a) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} H\left(1 + \frac{1}{n}\right) - H\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 0 - 0 = 0 \text{ (car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} H(x) = H(1) = 0)$$

$$\text{De même } \lim_{n \rightarrow +\infty} H\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 0$$

b).  $H'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in ]0; 2[$ , et  $f$  est strictement croissante sur  $]1; 2[$  or  $1 \leq 1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{n} < 2$

$$\text{donc } H'\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq H'(x) \leq H'\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \forall x \in \left[1 + \frac{1}{n+1}; 1 + \frac{1}{n}\right],$$

Or  $H$  est continue sur  $\left[1 + \frac{1}{n+1}; 1 + \frac{1}{n}\right]$ , et  $H$  est dérivable sur  $\left]1 + \frac{1}{n+1}; 1 + \frac{1}{n}\right[$  donc d'après le théorème des accroissements finis on a :

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \left(H'\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \leq H\left(1 + \frac{1}{n}\right) - H\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \left(H'\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \text{ on a } \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

c). On a  $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ,  $\frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq n^2 u_n \leq \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$ .

#### Exercice 4:

I). 1) On a  $z' + z'' = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{1} = 2m$  signifie  $\frac{z_{M'} + z_{M''}}{2} = m = z_M$  signifie  $M$  est le milieu du segment  $[M'M'']$ .

$$2). \text{On a } \arg(z') + \arg(z'') = \arg(z'z'') = \arg(2) = \arg(2) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\cdot \text{On a } \arg(z') + \arg(z'') \equiv 0 [2\pi] \text{ signifie } (\widehat{O\vec{I}; O\vec{M}'} + \widehat{O\vec{I}; O\vec{M}''}) \equiv 0 [2\pi] \text{ signifie } (\widehat{O\vec{I}; O\vec{M}''}) \equiv -(\widehat{O\vec{I}; O\vec{M}'}) [2\pi]$$

signifie  $[OI]$  est la bissectrice de  $(\widehat{O\vec{M}'; O\vec{M}''})$ .

II). 1).  $\Delta' = 1 - 1 - e^{i2\theta} = (ie^{i\theta})^2$  donc  $z_1 = 1 - ie^{i\theta}$  et  $z_2 = 1 + ie^{i\theta}$

$$2). a). \frac{z_1 + z_2}{2} = 1 = z_I \text{ signifie } I \text{ est le milieu du segment } [M_1 M_2] \text{ signifie } S_1(M_1) = M_2$$

b). On a  $|O M_1| = |O M_2| = 1$  signifie  $M_1, M_2$  et  $O$  sont situés sur le cercle  $\zeta$  de rayon 1 et de centre  $I$ .

c). On a  $[M_1 M_2]$  est un diamètre de  $\zeta$  et  $O \in \zeta$  donc le triangle  $OM_1 M_2$  est rectangle en  $O$ .

d). Le triangle  $OM_1 M_2$  est isocèle en  $O$  signifie  $OM_1 = OM_2$  signifie  $|z_1| = |z_2|$

Le calcul donne  $\sin(\theta) = 0$  signifie  $\theta = 0$  (car  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ).

**BON TRAVAIL**

