

<u>Lycée Houmet Souk 1</u>	<u>Devoir de Contrôle N : 1</u>	<u>4 Technique 4</u>
<u>Prof : Loukil Mohamed</u>	<u>Durée : 2 Heures</u>	<u>12 - 11 - 2013</u>

EXERCICE N : 1 (8 points)

A) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

On désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

b) Montrer que f est continue en 0.

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0. Que peut-on déduire ?

b) Donner des équations cartésiennes des demi tangentes à (Cf) au point O.

B) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

1) Prouver que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{1+x^2 + \sqrt{1+x^2}}$.

2) Sans résoudre l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$, montrer qu'elle admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution α

3) Vérifier que $\alpha \in]1.33 ; 1.34[$.

EXERCICE N : 2 (4 points)

Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1) Déterminer le sens de variation de f sur $[0, 1]$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par : $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$.

Justifier que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

3) On admet que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $g(x) = x$.

a) Prouver que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$; $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$.

c) Déduire que pour tout $x \in [0, 1]$; $x + \frac{\pi}{4} - 1 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

EXERCICE N : 3 (8 points)

A) Soit m un nombre complexe non nul . Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 2imZ - (1 + m^2) = 0$.

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives : $Z_0 = i$, $Z_1 = im + 1$ et $Z_2 = im - 1$.

I) On suppose que : m est un réel non nul .

1) Vérifier que : $OM_1 = OM_2$.

2) Montrer que (OA) est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.

3) Déterminer les valeurs de m , pour que le triangle OM_1M_2 soit équilatéral .

II) On suppose que : $m = -ie^{2i\theta}$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M_1 lorsque θ varie dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2) a) Déterminer la forme exponentielle de Z_1 et Z_2 .

b) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2})$.

c) Déduire la nature du triangle OM_1M_2 .

3) a) Montrer que $\frac{OM_2}{OM_1} = \operatorname{tg}(\theta)$.

b) Déduire la valeur de θ pour laquelle OM_1M_2 est isocèle

Bon travail. 😊