



15/11/2013

1/2

EXERCICE N°1 : (4 points)

Une seule des trois propositions suivantes est exacte, le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée.**

- 1) Pour tous réels a , b et θ , la partie réelle de $e^{i\theta}(a - ib)$ est :
 - a) a
 - b) $-b$
 - c) $a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta$
- 2) Si $z = (1 - \sqrt{5})e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors un argument de z est :
 - a) $\frac{\pi}{3}$
 - b) $\frac{4\pi}{3}$
 - c) $-\frac{\pi}{3}$
- 3) Si U_n est une suite réelle telles que : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :
 - a) U_n converge vers 1
 - b) U_n converge vers 0
 - c) U_n st divergente
- 4) Si f et g sont deux fonctions telles que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$ alors :
 - a) $\lim_{+\infty} f \circ g = 2$
 - b) $\lim_{+\infty} f \circ g = +\infty$
 - c) $\lim_{+\infty} f \circ g = 2$

EXERCICE N°2 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x \leq -1 \\ -3 + \frac{x+1}{\sqrt{2+x}-1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que f est continue en (-1) .
b) Démontrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) = \pi$ (on peut utiliser un changement de variable)
b) Dédurre alors $\lim_{-\infty} f$
- 3) a) Montrer que l'équation « $f(x)=0$ » admet une solution α dans $[-2, -1]$.
b) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha^2}\right) = \frac{2}{\alpha^2} - 1$

EXERCICE N°3 : (5,5 points)

Soit la suite U_n définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases} \quad n \geq 0$$

- 1) a) Montrer par récurrence que $U_n \leq n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Vérifier que $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) En déduire la monotonie de la suite (U_n) .
- 2) On désigne par V_n la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = U_n - n$

- a) Démontrer que est V_n une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
- b) En déduire que : $U_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Déterminer alors la limite de la suite U_n .

2/2

EXERCICE N°4 : (5,5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm) on considère les points $A; B$ et Ω d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_\Omega = 2$

Soit ζ le cercle de centre Ω et de rayon 2

- 1) a/ Vérifier que $B \in \zeta$
- b/ Placer les points A et Ω . Construire alors le point B

2)a/ Ecrire z_A sous forme exponentielle

b/ Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique

c/ Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d/ En déduire la forme exponentielle de z_B

e/ Déterminer alors la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

☺ BON TRAVAIL ☺