Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit S la sphère dont une équation cartésienne est :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ et P_m le plan dont une équation cartésienne est $(m-3)x + 2my + 2mz - 3 = 0$ où m est un paramètre réel

1) Calculer les coordonnées du centre I et le rayon R de la sphère S
2) a) Calculer la distance $d(I , P_m)$ en fonction de m
b) Déterminer la valeur de m pour que S soit tangente à P_m
3) Soit D la droite de l'espace dont un système paramétrique est $\begin{cases} x = -1 \\ y = -t + \dfrac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$ $t \in IR$

a) Vérifier que pour tout réel m , D est incluse dans P_m
b) Calculer la distance d(I , D)
c) Déduire la position de S par rapport à D.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne A (1 ,1 ,0) ;B(0 , 1 ,0) ;C (0 , 0, 1) et D(0 ,2 , 1)

a) Vérifier $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$ déduire que les points A , B , C ne sont pas alignés .
  b) Préciser alors la position relative du plan (ABC) et la droite (BD) .
  c) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
a) Ecrire une équation du plan Q médiateur du segment [CD]
b) Montrer que (AB) est incluse dans Q
c) Déduire la position relative des droites (AB) et (CD)
  3) Calculer le volume du tétraèdre ABCD .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $IR / \{1\}$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{2(x-1)^2}$ On note C sa courbe représentative dan un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)a) Vérifier que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)\left(\dfrac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2}\right)$
  b)Dresser le tableau de variation de f
2) a)Montrer que la droite D : y = x- 1 est une asymptote oblique au voisinage de ∞
  b) Préciser l'autre asymptote
3) Tracer C
4) Trouver la primitive de f qui prend la valeur 1 au point 0.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1) a)Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

 b) Montrer que pour tout $x \in [0 , +\infty[$; $0 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$

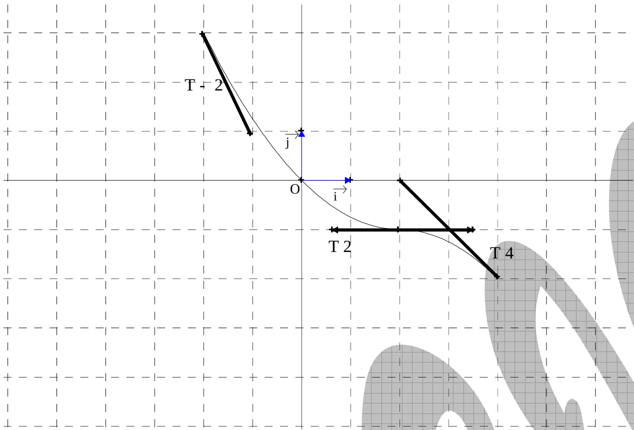
c) Déduire que pour tout $x \in [0 , +\infty[$ $0 \leq f'(x) \leq 2$

2) En utilisant l 'inégalité des accroissements finis montrer que pour $x \in [0,+\infty[$, $1 \leq f(x) \leq 2x+1$

Exercice 5

Le graphique ci dessous est celui d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-2,4]$

En utilisant la courbe représentative de f :
Répondre par VRAI ou FAUX en justifier la réponse
a) $f'_d(-2) = -2$
b) $f'_d(-2) = 2$
c) $f'_d(-2) = 3$



d) La fonction f réalise une bijection de $[-2,4]$ sur un intervalle $[-2,3]$.

e) La fonction f réalise une bijection de $[-2,4]$ sur un intervalle $[-2,4]$.

Justifier que l a fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable au point -1.
Calculer $(f^{-1})'_g(3)$ et $(f^{-1})'_d(-2)$
Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}

Exercice 6

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne les points A $(2,1,1)$ et I $(3,-1,0)$. $P_1 = \{M \in \xi$ tels que $MA^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0\}$

1) a) Vérifie que $A \in P_1$

b) Montrer que P_1 est un plan d'ont une équation cartésienne est : $x - 2y - z + 1 = 0$.

2) Soit S la sphère de centre I et passant par A.

3) Vérifier que le rayon de la sphère S est $R = \sqrt{6}$ puis déterminer une équation cartésienne de S.

4) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x - y + z - 4 = 0$.

a) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle C dont on précisera les coordonnées de son centre H et son rayon r.

b) Soit le point $B(2,-2,-2)$. Vérifier que $[AB]$ est un diamètre de C.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 tangent à S en B.

Exercice 7

L'espace est muni d'un repère orthonormé

1) On considère le plan P passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et le plan R d'équation cartésienne x + 2y − 7 = 0.

a) Démontrer que les plans P et R sont perpendiculaires.

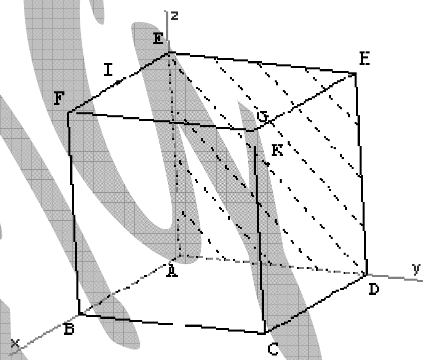
b) Démontrer que l'intersection des plans P et R est la droite D passant par le point

C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

c) Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan P, puis la distance du point A au plan R.
d) Déterminer la distance du point A à la droite D .
2) a) Soit, pour tout nombre réel t, le point Mt de coordonnées (1 + 2t ; 3 − t ; t).
Déterminer en fonction de t la longueur AM. On note φ(t) cette longueur.
On définit ainsi une fonction φ de IR dans IR.
b) Etudier le sens de variations de la fonction φ ; préciser son minimum
c) Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Exercice 8

Soit le cube ABCDEFGH l'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$.On désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.



1) a) Vérifier que $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$. En déduire l'aire du triangle IGA.
2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan AIG.

Exercice 9

F étant la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$,

1) Etudier les variations de f. Montrer que f admet une réciproque g définie sur un intervalle I à préciser,
3) a- Sur quel intervalle la fonction g est-elle dérivable ?

b- Calculer $g\left(\frac{2}{3}\right)$ et $g'\left(\frac{2}{3}\right)$.

c- Donner l'expression de g'(x) pour $x\in\left]\frac{1}{2},1\right]$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur [0,1[par $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1 - x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f sur [0,1[
2) a) Montrer que f réalise une bijection de [0,1[sur IR+.On note f -1 la réciproque de f.
   b) Etudier la dérivabilité de f -1 à droite en zéro
3) a) Etudier la position de la courbe Cf par rapport à la droite $\Delta : y = x$, préciser les coordonnées des points d'intersection de Cf et Δ
   b) Construire C_f et C_f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3) Exprimer f-1(x) en fonction de x.

4) Montrer que $-\frac{2}{x}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f^{-1}(x)}$.

5) On pose x=tanφ. Exprimer $f(x)+ f^{-1}(x)$ et $f(x) - f^{-1}(x)$ en fonction de φ.