Résumé : **Nombres complexes**
Niveau : *Bac Sciences Techniques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : *saberbjd 2003@yahoo.fr*

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ avec a et b sont des réels.

L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est appelée **forme algébrique** ou **forme cartésienne** du nombre complexe z. a est **la partie réelle** de z, notée $\boldsymbol{Re(z)}$, b est **la partie imaginaire** de z notée $\boldsymbol{Im(z)}$.

Remarque :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

Si $b = 0$, z est réel. Si $a = 0$, z est dit **imaginaire pur**.

Définition :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(a, b)$ un point du plan.

- On appelle **affixe** de M, le nombre complexe noté $aff(M)$ ou z_M tel que : $aff(M) = a + ib$. Le nombre complexe $a + ib$ est dit aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on le note $aff(\overrightarrow{OM})$ ou $z_{\overrightarrow{OM}}$.
- $M(a, b)$ est le **point image** du nombre complexe $z = a + ib$.

Propriétés :

A et B sont deux points du plan d'affixes respectifs z_A et z_B. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.

1. $aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2. $aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\, aff(\vec{u}) + \beta\, aff(\vec{v})$ pour tous réels α et β.

Définition : *"Conjugué d'un nombre complexe"*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.

Propriétés :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$
3. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, $z' \neq 0$
5. $z + \bar{z} = 2a$
6. $z - \bar{z} = 2ib$
7. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Théorème :

Soit z un nombre complexe.

- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Définition : *"Module d'un nombre complexe"*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de z et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|-z| = |z|$
4. $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

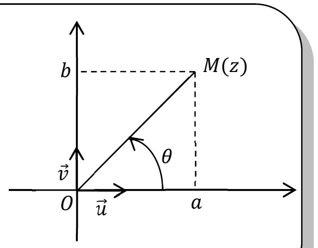
Définition : *"Argument d'un nombre complexe"*

Le plan est muni d'un ROND $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$z = a + ib$ (a et b sont des réels) est un nombre complexe non nul d'mage M.

On appelle **argument** de z et on note $arg(z)$, toute mesure, en radian, de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

$arg(z) = \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) + 2k\pi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1. $arg(\bar{z}) = -arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
2. $arg(-z) = arg(z) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
3. $arg(z \cdot z') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
4. $arg(z^n) = n \cdot arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*$
5. $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
6. $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Théorème :

Soit z un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $z = a + ib$ et θ un argument de z. Alors : $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{z}|\cos\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{z}|\sin\boldsymbol{\theta}$ ou encore : $\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{z}|}$ et $\sin\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{z}|}$

On a alors $\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|(\boldsymbol{cos\,\theta} + \boldsymbol{i\,sin\,\theta})$

Définition : *"Forme trigonométrique d'un nombre complexe"*

Soit z un nombre complexe non nul.

L'écriture de z sous la forme $|z|(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ ou $[|z|,\theta]$ où θ désigne un argument de z est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** de z.

$$\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|(\boldsymbol{cos\,\theta} + \boldsymbol{i\,sin\,\theta}) = [|\boldsymbol{z}|,\boldsymbol{\theta}]$$

$|z|$ et θ sont les **coordonnées polaires** du point $M(z)$.

Propriétés :

Soient $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$.

1. $\bar{z} = [r,-\theta]$
2. $z \cdot z' = [r \cdot r',\theta + \theta']$
3. $z^n = [r^n, n\theta]$
4. $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r},-\theta\right]$
5. $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'},\theta - \theta'\right]$

Définition : *"Forme exponentielle d'un nombre complexe"*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\cos\theta + i\,\sin\theta = e^{i\theta}$.

Soit $z = [r,\theta]$ un nombre complexe non nul. L'écriture $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ est **la forme exponentielle** de z.

Propriétés :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$.

1. $\bar{z} = re^{-i\theta}$
2. $z \cdot z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
3. $z^n = r^n e^{in\theta},\ n \in \mathbb{Z}$
4. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
5. $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ on a : $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \boldsymbol{\cos\theta}$ et $\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \boldsymbol{\sin\theta}$

Formule de Moivre :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $(\boldsymbol{\cos\theta + i\sin\theta})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

Propriétés :

Le plan est muni d'un ROND $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

1. $\boldsymbol{(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est réel.
3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est imaginaire pur.

Définition : *"Racine carrée d'un nombre complexe"*

Soit Z un nombre complexe.

On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe z vérifiant : $\boldsymbol{z^2 = Z}$.

Théorème :

$Z = a + ib$ et $z = x + iy$ sont deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Remarques :

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- Il est interdit d'utiliser la notation $\sqrt{\ }$ pour exprimer une racine carrée d'un nombre complexe, car il ne s'agit pas d'une fonction sur $\mathbb{C}$.

Théorème :

Soit $\boldsymbol{Z = re^{i\theta}}$ un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle.

Les racines carrées de Z sont : $\boldsymbol{z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}$ et $\boldsymbol{z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}$

Définition : *"Equation du second degré à coefficients complexes"*

Soient a, b et c trois nombres complexes donnés tels que $a \neq 0$.

L'équation : $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ s'appelle équation du second degré à coefficients complexes.

Théorème :

Soit $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ une équation du second degré à coefficients complexes.

On pose $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$. Appelé le discriminant de l'équation (E).

1. Si $\Delta = \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double : $\boldsymbol{z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}}$
2. Si $\Delta \neq \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes : $\boldsymbol{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$ avec δ est une racine carrée de Δ.
3. Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors : $\boldsymbol{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$

Théorème :

Soit $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ une équation du second degré à coefficients complexes.

Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Théorème :

Soient S et P deux nombres complexes donnés.

Les nombres complexes z_1 et z_2 tels que : $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \cdot z_2 = P \end{cases}$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\boldsymbol{z^2 - Sz + P = 0}$.

Définition : *"Racines n^ièmes d'un nombre complexe"*

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On **appelle racine n^ième** de Z, tout nombre complexe z vérifiant : $\boldsymbol{z^n = Z}$.

Si $Z = 1$, alors on dit que z est une **racine n^ième de l'unité**.

Théorème :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle.

- Les n racines n^ièmes de Z sont les nombres complexes : $\boldsymbol{z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}}$ avec $\boldsymbol{k \in \{0, 1, \dots, n-1\}}$.
- Les images M_k des nombres complexes z_k sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.