Résumé : **Géométrie ans l'espace I**
Niveau : *Bac Sciences Techniques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : *saberbjd2003@yahoo.fr*

Définition : *"Repère et base de l'espace"*

Soit O un point, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace.

$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est un repère de l'espace, lorsque $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

Le triplet $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est dit une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Définition :

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace.

- Pour tout point M, il existe trois réels x, y et z tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

  x, y et z sont **les coordonnées de M** dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

  x es **l'abscisse**, y est **l'ordonnée** et z est le **cote** du point M. On note : $M(x,y,z)$.
- Tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire : $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ où a, b et c sont des réels.

  a, b et c sont **les coordonnées de $\vec{u}$** dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On note : $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Propriétés :

Soient $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Si le repère est orthonormé, alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Définition : *"Vecteurs colinéaires"*

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** s'il existe un réel α tel que $\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$.

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ de l'espace sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix} = 0$.

Théorème :

Soient A, B et C trois points de l'espace.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Définition : *"Vecteurs coplanaires"*

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{w}$.

Théorème :

Trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a"\\b"\\c"\end{pmatrix}$ de l'espace sont coplanaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & a' & a"\\b & b' & b"\\c & c' & c"\end{vmatrix} = 0$.

Théorème :

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Théorème :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'ensemble des point M de l'espace tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On la note $D(A,\vec{u})$.

Théorème : *"Représentation paramétrique d'une droite"*

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_0,y_0,z_0)$ un point de l'espace.

$M(x,y,z) \in D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases}x = x_0 + \alpha\,a\\y = y_0 + \alpha\,b\\z = z_0 + \alpha\,c\end{cases}$, α est un paramètre réel.

Ce système est appelé **une représentation paramétrique** de la droite $D(A,\vec{u})$.

Positions relatives de deux droites :

Deux droites de l'espace sont :

- Coplanaires (contenues dans le même plan). Dans ce cas, elles sont soit sécantes soit parallèles (strictement ou confondues).

– Non-coplanaires (ne sont pas contenues dans le même plan). Dans ce cas, elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

Théorème :

Soient D et D' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$D \,//\, D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Ce plan est noté $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Théorème : *"Représentation paramétrique d'un plan"*

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

$M(x, y, z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha\, a + \beta\, a' \\ y = y_0 + \alpha\, b + \beta\, b' \\ z = z_0 + \alpha\, c + \beta\, c' \end{cases}$, α et β sont des paramètres réels.

Ce système est appelé **une représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$**.

Théorème :

– Tout plan de l'espace a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont réelles telles que $(a, b, c) \neq (0,0,0)$.
– Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont réelles tels que $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ est celle d'un plan de l'espace.
– Soit $P: ax + by + cz + d = 0$ un plan et soit $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.
  $\vec{u}$ est un vecteur du plan $P \Leftrightarrow a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Positions relatives de deux plans :

Deux plans de l'espace sont parallèles (strictement ou confondus) ou sécants (l'intersection est une droite).

Théorème :

– Deux plans sont parallèles ssi tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.
– Soient $P: ax + by + cz + d = 0$ et $P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans où a, b et c sont non nuls. On a : $P // P' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.
– Deux plans sont sécants ssi il existe un vecteur de l'un qui n'est pas un vecteur de l'autre.

Positions relatives d'un plan et d'une droite :

Un plan et une droite sont parallèles (strictement ou la droite est incluse dans le plan) ou sécants.

Théorème :

– Un plan P et une droite D sont parallèles si et seulement s'il existe un vecteur directeur de D qui est un vecteur de P.
– Un plan P et une droite D sont sécants si et seulement s'il existe un vecteur de D qui n'est pas un vecteur de P.