Résumé : **Fonctions exponentielles**
Niveau : *Bac Sciences Techniques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : *saberbjd2003@yahoo.fr*

Théorème et définition : *"Fonction exponentielle de base e"*

La fonction **exponentielle de base e**, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln.

$exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$

$x \mapsto exp(x) = e^x$

$(ln)^{-1} = exp$

$(exp)^{-1} = ln$

Propriétés :

1. $exp(0) = e^0 = 1$
2. $exp(1) = e^1 = e$ où $e = 2,71828182845904 \dots$
3. La fonction exp est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $exp'(x) = exp(x) = e^x$.
4. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]0,+\infty[$ on a :

   $e^x = y \Leftrightarrow ln(y) = x$, $ln(e^x) = x$ et $e^{ln(y)} = y$

Propriétés :

Pour tous réel x et y on a :

1. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
2. $(e^x)^r = e^{xr}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$
3. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
4. $\frac{1}{e^y} = e^{-y}$

Propriétés : *"Equations et inéquations"*

1. $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
2. $e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$
3. Si u et v sont deux fonctions, alors :
4. $e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ et $e^{u(x)} \geq e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) \geq v(x)$

Propriétés : *"Limites usuelles"*

1. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
4. $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$ pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $e \circ u = e^u$ est dérivable sur I et : $(e \circ u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

Conséquence :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Une primitive de la fonction : $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I est la fonction : $x \longmapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$

Définitions : *"Fonction exponentielle de base a - Puissance rationnelle"*

1. Soit $a \in]0,+\infty[$. On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto a^x = e^{x \cdot ln(a)}$
2. $\forall x \in]0,+\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ on a : $x^r = e^{r \cdot ln(x)}$ (Puissance rationnelle)

Propriétés :

$\forall x, y \in]0,+\infty[$ et $\forall r, r' \in \mathbb{Q}$ on a :

1. $x^r \cdot x^{r'} = x^{r+r'}$
2. $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$
3. $x^r \cdot y^r = (xy)^r$
4. $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

$\forall a, b \in]0,+\infty[$ et $\forall x, x' \in \mathbb{R}$ on a :

1. $a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'}$
2. $(a^x)^{x'} = a^{xx'}$
3. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
4. $\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$