EXERCICES HOMOTHETIES – SUITES 2SC Mr Y.BOULILA

EXERCICE 1

Soit un triangle ABC. On note I le milieu de [AB] et G le barycentre des points {(A ;2) ; (B ;2) ; (C ;-1)}.

1°) Démontrer que les points I, G, C sont alignés.

2°) Faire une figure.

3°) A tout point M du plan on associe le point M' définie par :

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

Démontrer que les points G, M et M' sont alignés.

4°) Soit *h* l'homothétie de centre G et de rapport –2.

a) Tracer l'image du triangle ABC par l'homothétie *h*.

b) Démontrer que *h*(M) = M'

c) Quel ensemble décrit le point M' lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB].

EXERCICE2

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. On note I le milieu de [BC] et J le milieu de [AC].

Soit *p* un paramètre réel ; à tout point M du plan on associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + p\overrightarrow{MC}$$

1°) Dans cette question on suppose que *p* = -1.

a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur fixe que l'on déterminera.

b) En déduire la nature de la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' dans le cas où *p* = -1.

2°) Dans cette question on suppose que *p* = 2.

a) Construire le point K barycentre des points pondérés (A ;2) et (B ;-1)

b) Construire le point G barycentre des points pondérés (A ;2), (B ;-1) et (C ;2)

c) Démontrer que G appartient à la droite (BJ).

d) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GM}$.

e) En déduire la nature de la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' dans le cas où $p = 2$.

3°) Le point M décrit le cercle de diamètre [BC]

a) Quel est l'ensemble (E_1) des points M' dans le cas où $p = -1$? Le construire.

b) Quel est l'ensemble (E_2) des points M' dans le cas où $p = 2$? Le construire.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$$

1°) a) Calculer u_1 et u_2.

b) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

2°) On pose $v_n = (u_n - 1)^2$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

1°) a) Calculer u_1 , u_1 , u_3 ; la suite (u_n) est-elle géométrique ?

2°) Soit $v_n = u_{n+1} - u_n$; montrer que (v_n) est une suite géométrique.

3°) On pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

a) Calculer S_n en fonction de n.