Lycée sec Ibn-Elhaytham	**Devoir de synthèse n°1 Mathématiques**	Classe : 4^{eme} sc tech
AS :2012/2013		Durée : 2h
Prof :Mahmoudi		Date :05/12/2012

Exercice n°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie aucune justification n'est demandée :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé directe

1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 6+i$ est :

a/ 3i b/ 2-i c/ 2+i

2) Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

a/ $|z|+1$ b/ $\sqrt{z^2+1}$ c/ $|iz-1|$

3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a/ $-\frac{\pi}{3}+\theta$ b/ $\frac{2\pi}{3}+\theta$ c/ $\frac{2\pi}{3}-\theta$.

4) Soient A et B deux points d'affixe respective i et −1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i| = |z+1|$ est :

a/ la droite (AB) b/ le cercle de diamètre [AB] c/ La médiatrice du segment [AB].

Exercice n°2 :(6 points)

1) Résoudre dans ℂ l'équation : $z^2 - (3+4i)z - 8 + 6i = 0$.
2) Soit dans ℂ l'équation (E) : $z^3 - (1+4i)z^2 - (14+2i)z - 16 + 12i = 0$.
   a) Vérifier que (-2) est une solution de l'équation (E).
   b) Factoriser $z^3 - (1+4i)z^2 - (14+2i)z - 16 + 12i$.
   c) Résoudre alors dans ℂ l'équation (E).
3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points A et B d'affixes respectives -1 + 2i et 4 +2i.
   a) Ecrire $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique puis déterminer Arg($\frac{z_A}{z_B}$).
   b) En déduire que le triangle OAB est rectangle en O.
4) Soit ξ le cercle circonscrit au triangle OAB et D le point d'affixe 4 - 3i.
   a) Faire une figure.
   b) Montrer que la droite (OD) est tangente au cercle ξ.

Exercice n°3 (6 points)

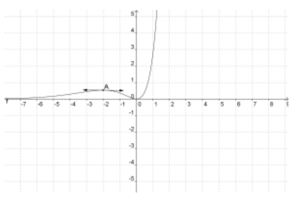
Soit f la fonction définie par f(x) = $\frac{x^2-2x-2}{x-3}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) a) Vérifier que pur tout x de D_f on a f(x) = x + 1 + $\frac{1}{x-3}$.

   b) Déduire que la droite Δ : y = x + 1 est une asymptote de C_f au voisinage de + ∞ et de - ∞.

   c) Etudier la position de C_f par rapport à Δ.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4) Tracer C_f et Δ dans le même repère .
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle]-∞, 2[.
   a) Montrer que g réalise une bijection de]-∞, 2[dans un intervalle que l'on déterminera.
   b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans]-∞, 2[une unique solution α et que -1 $< \alpha <$ 0.

Exercice n°4(5 Points)



Dans le graphique si dessus on a représenté une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

On suppose que la courbe représentative de f admet au voisinage de +∞ une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées et au voisinage de - ∞ la droite d'équation y = 0 comme asymptote.

Par une lecture graphique :

1) Déterminer f'(-2) et f'(0).
2) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
3) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
4) Dresser le tableau de variation de f (on ne demande pas la valeur de f(-2)).
5) Montrer que la restriction h de f à l'intervalle [0, + ∞[est une bijection.
6) Déterminer f([0, + ∞[).

<u>Bon travail</u>