

EX 1 :

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 - U_n + 2}{1 + U_n} \end{cases}$$

- 1)
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 2$
 - b) Etudier la monotonie de (U_n) , en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.
- 2)
 - a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$
 - b) déduire que $0 \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- 3) on pose $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$
 - a) montrer que $n \leq S_n \leq n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 - b) en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

EX 2 :

Soit l'équation (E): $Z^3 - 4iZ^2 - 6Z + 4i = 0$

- 1)
 - a) Montrer que $2i$ est une solution de (E).
 - b) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E).
- 2) Soit dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, , v)$, les points A, B et C d'affixes respectives $-1+i$, $1+i$ et $2i$
 - a) Calculer OA, OB ; Que peut-on déduire?
 - b) Montrer que OACB est un carré dont on précisera l'affixe de son centre I.
- 3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que

$$|z| = |z+1-i|$$

EX 3:

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} : $Z^2 + (6+5i)Z + 2+16i = 0$
- 2) Soit $f(z) = Z^3 + 2(3+2i)Z^2 + (7+10i)Z + 16-2i$

a) Déterminer le nombre complexe a tel que , pour tout nombre complexe z on a:

$$f(z) = (Z-a)(Z^2+(6+5i)Z+2+16i)$$

b) Résoudre alors l'équation $f(Z)=0$.

3) Dans le plan P complexe rapporté un repère orthonormé direct $(O, , v)$; on considère les points $A(i)$, $B(-4-2i)$ et $C(-2-3i)$ et on désigne par Z_I l'affixe du point I milieu de $[AC]$.

a) Représenter les points A , B , C et I

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

4) a) Construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des triangles directs rectangles et isocèles en B .

b) en déduire les affixes respective Z_D et Z_E s des points D et E .

EX 4 :

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé

1) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2-2x+5})^3}$

2) Montrer que $I(1 ; 0)$ est un centre de symétrie de C .Donner une équation de la tangente à C en I

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]-1 ; 1[$.construire les courbes C de f et C' de f^{-1} .

5) Montrer que $f^{-1}(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

BON CHANCE