7C	DEVOIR DE MATHS Nombres complexes	DUREE 4H	11/11/2012

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 (3 POINTS)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + ai\right)z + \frac{3}{2} - 3ai, \qquad a \in \mathbb{C}$$

Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

1) $a = -\frac{1}{2}i$ 2) $a = i$ 3) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $a = \frac{1}{2}$

EXERCICE 2 (3 POINTS)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$E_\alpha \qquad z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0 \text{ où } \alpha \text{ est un réel donné.}$$

1) Résoudre l'équation E_α et donner les solutions sous formes algébrique et trigonométrique.

2) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2z^n\sin\alpha + 1 = 0 \text{ où } n \in IN^* \text{ donné.}$$

EXERCICE 3 (3 POINTS)

Soit $z = e^{i\frac{\pi}{2013}}$. On pose $S = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2012}$.

1) Montrer que $S = \frac{1}{1-z}$.

2) Ecrire S sous forme algébrique.

3) En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{4\pi}{2013} + ... + \cos\frac{2012\pi}{2013} = \frac{-1}{2}$.

EXERCICE 4 (5 POINTS)

On considère le polynôme *P*, défini sur l'ensemble des nombres complexes, par :

$$P(z) = z^3 - 4iz^2 - (4+i)z - 3 + 3i$$

1.a) Calculer $P(-1)$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout complexe z:

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$

c) Déterminer les nombres z_0, z_1, z_2 solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $|z_0| < |z_1| < |z_2|$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A,B,C les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2. Placer A,B et C sur le repère et montrer que les points O,A,B,C sont cocycliques.

3) On pose $Z = \dfrac{z - z_2}{z - z_1}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $\arg Z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ **b) $2\arg Z = 2(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$**

c) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ **d) $|Z| = 2$**

EXERCICE 5 (6 POINTS)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E: $z^2 - 8iz - 16 - 2i = 0$. On note z_1 et z_2 ses solutions avec $|z_2| < |z_1|$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Le point Ω milieu de $[AB]$.

Soit f l'application qui à tout point M du plan P, d'affixe z, ($z \neq 4i$), associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{4iz+16+2i}{z-4i}$. On note f(M)=M'.

a)Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés .

3.a) Montrer que $(z' - 4i)(z - 4i) = 2i$, en déduire que $\Omega M \times \Omega M' = 2$.

b) Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. En déduire une construction géométrique, justifiée, du point M' à partir d'une position donnée de M extérieure à la droite (AB).

4) Déterminer et construire lieu géométrique Γ' du point M' dans chacun des cas suivants du point M :

a) M décrit le cercle de centre Ω et de rayon r

b) M décrit la droite passant par Ω et parallèle à la première bissectrice ; $M \neq \Omega$.

c) M décrit la droite passant par Ω et parallèle à (Ox) ; $M \neq \Omega$.

Fin.