MINISTERE DE L'EDUCATION DIRECTION REGIONALE DE MANOUBA ❀❀❀	Série de Mathématiques Classe : Deuxième sciences 1& 2 Thème :- Calcul vectoriel - barycentre	LYCEE SECONDAIRE OUED ELLIL ANNEE SCOLAIRE 2012 – 2013 ❀❀❀
Prof : Mr Bellassoued	❀❀❀	Date : Octobre 2012

Calcul vectoriel

Exercice 1

ABC est un triangle.

Les points D et E sont définis par : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$

1) Faire un dessin.

2) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ puis $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

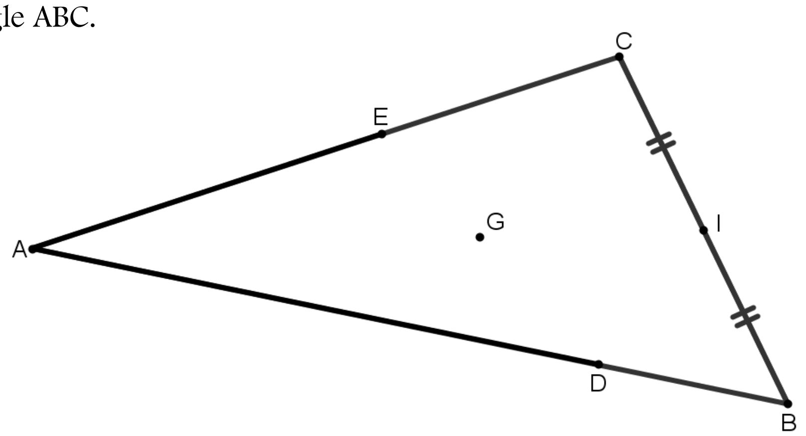
3) Déterminer les coordonnées des points A , B, C, D et E dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

4) Démontrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2

Dans le dessin ci-contre, vous avez un triangle ABC.

- I est le milieu de [BC].
- G le **centre de gravité** du triangle ABC
- Le point D est défini par : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
- Le point E est défini par : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$



1)Prouver que $\overrightarrow{ED}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

2)Prouver que $\overrightarrow{GD}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

3)En déduire que les points E,G et D sont alignes

4)a-Déterminer les coordonnées des points A,B,C,D,E,I et G dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

b-Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Exercice 3

Soit un triangle ABC. On considère les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Démontrer que les droites (MN)et (BC) sont parallèles.

Exercice 4

On donne A (3 ; 2), B(x+2 ; 3) et C(5 ; x).

1) Calculer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

2) Calculer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux.

Exercice 5

Étudier la colinéarité des vecteurs suivants : $\vec{U}\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\vec{V}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ 2+\sqrt{3}\end{pmatrix}$

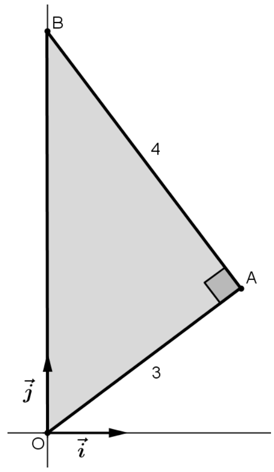
Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le triangle OAB rectangle en A .

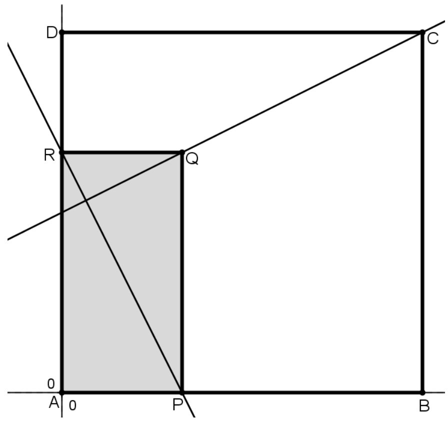
On donne AB = 4 et OA = 3.

1) Calculer la distance OB et en déduire les coordonnées de B .

2) On pose A (x ; y) avec x > 0 et y > 0.
Calculer les coordonnées du point A



EXERCICE 7



Soit un carré AB CD. On construit un rectangle APQR tel que :
P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré ABCD

On considère le repère orthonormé $(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ )$.
On désigne par x l'abscisse du point P.

1. Déterminer les coordonnées des autres points de la figure.

2. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{CQ}$.

3. montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

BARYCENTRE

EXERCICE 1

Soit A et B deux points distincts .Construire le barycentre G des points pondérés (A,α) et (B,β) dans chacun des cas suivants:

1- $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ **2-** $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ **3-** $\alpha = -1$ et $\beta = 4$ **4-** $\alpha = 2$ et $\beta = -3$

EXERCICE 2

On considère trois points A,B et C ,le point M d,fini par : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$
le point G barycentre des points pondérés (A,3) et (B,2)

1- Construire les points M et G

2- Montrer que M est le barycentre des points pondérés (G,5) et (C,-4)

EXERCICE 3

On considère un parallélogramme ABCD et les points M et N tels que :

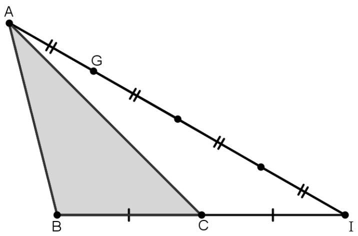
- M est le barycentre de (A,2) et (B,1)
- N est le barycentre de (C,2) et (B,1)

1- Montrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles

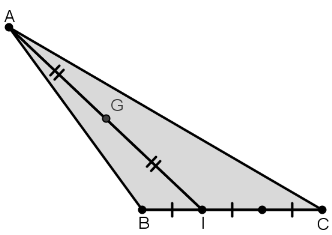
2- Les droites (BD) et (MN) se coupent au point G .
Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC

EXERCICE 4

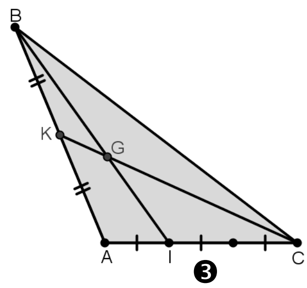
Dans chacun des 4 figures ; Déterminer α , β et γ pour que G soit barycentre des points (A,α) , (B,β) et (C,γ).



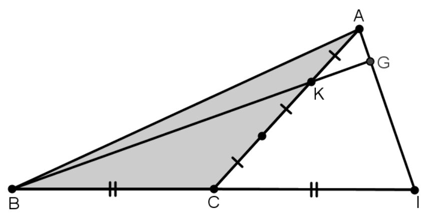
❶



❷



❸



❹

<u>Indication :</u> Pour les cas de figures ❸et❹ on pourra calculer les coordonnés de G dans un repère bien choisi

EXERCICE 5

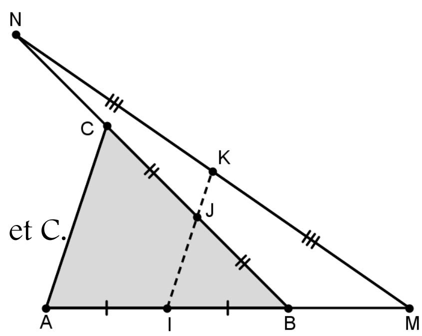
ABC est un triangle. On considère les points I, J et K définis par $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$
et K le symétrique de C par rapport à B.

1-Construire les points I, J et K.

2-Déterminer des coefficients a, b, c pour lesquels :
- I est le barycentre des points (A, a) et (B, b) ;
- J est le barycentre des points (A, a) et (C, c) ;
- K est le barycentre des points (C, c) et (B, b).

3-Soit G le barycentre des points (A,3), (B,-2) et (C,1)
démontrer que les droites (IC), (BJ) et(AK) sont concourantes en G.

EXERCICE 6



Sur la figure, les points M et N sont tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

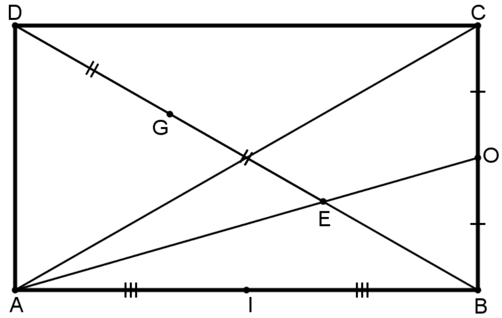
I, J et K désignent les milieux respectifs de [AB], [BC] et [MN].

1- Ecrire M comme un barycentre de A et B puis N comme un barycentre de B et C.

2- Choisir un repère du plan et prouver que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 7

Soit ABCD un rectangle. On note I le milieu de [AB] et E le centre de gravité du triangle ABC.
G le milieu de [DE]et O le milieu de [BC]



1. a- recopier la figure : AB=8cm et BC=6cm
   b-Construire F le barycentre de (C, 1) et (D, 3).

2- Démontrer que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GD}=\vec{O}$

3- en déduire que G appartient à la droite (IF).

4- Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

a- montrer que $(AK)//(CF)$

b- vérifier que le point K est barycentre de (A, 1) et (D, 3).

c- Montrer que le point O appartient à la droite (GK).

5- déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MD}\right\|$

Exercice 8

Soit ABC triangle rectangle en A . AB = 4cm et AC= 6cm, soit I milieu de [AB], A' milieu de [AC]

1) a) Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Quelle est la nature du quadrilatère $BAA'G$?

c) Calculer AG

2) Démontrer que G est le barycentre de (A ; -1), (B ; 2), (C ; 1)

3) a) Déterminer l'ensemble **E 1** des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2AG$

b) Montrer que A et C appartiennent à **E 1**

4) Soit $\vec{V}=-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$

a) Montrer que $\vec{V}=2\overrightarrow{IC}$

b) Déterminer l'ensemble **E 2** des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\vec{V}\right\|$

5) Soit G' le barycentre des points pondérés (A;2), (B;-3) et (C;-1)

a) Construire le point G'

b) Montrer que G, G' et A' sont alignés

Exercice 9

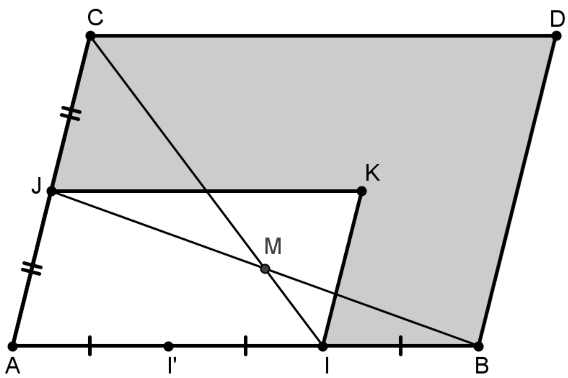
Soient A et B deux points distincts tels que AB = 4cm
1-Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a- $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=12$; b- $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

Exercice 10

Dans la figure si contre on a :

- ABDC et AIKJ sont deux parallélogrammes
- J est le milieu de $[AC]$
- I et I' deux points de $[AB]$ tels que $AI'=I'I=IB$
- M est le point d'intersection de (BJ) et (CI)



1-a- écrire I comme barycentre des points A et B .

b- écrire K comme barycentre des points A , B et C .

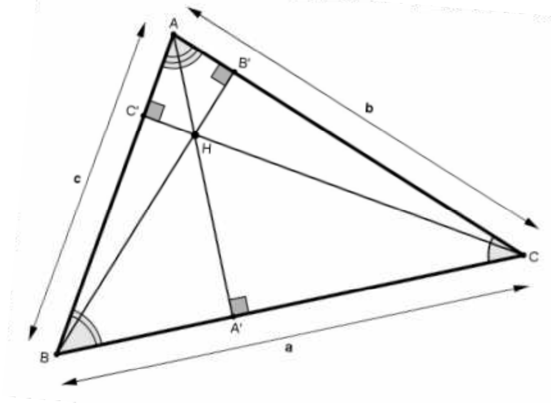
2- Montrer que le point M est barycentre des points pondérés (A,1),(B,2) et (C ,1).

3- Montrer que les droites (BJ) , (CI) et (DK) sont concourantes au point M .

4- Montrer que les quatre points I' , M , K et D sont alignés .

5- Construire en justifiant le centre d'inertie O du plaque homogène grise

Exercice 11



- ABC est un triangle dont les 3 angles sont aigus
- On appelle A', B' ,C' les pieds des hauteurs
- H l'orthocentre du triangle ABC
- On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

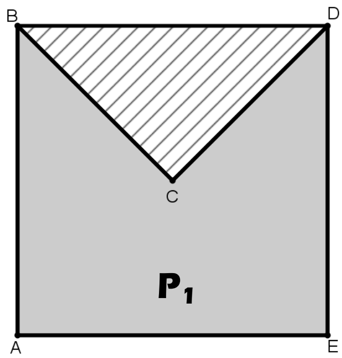
1-Démontrer que A' est le barycentre de $(B, b\cos\hat{C})$ et $(C, c\cos\hat{B})$

2-En déduire que A' est le barycentre de $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, \tan\hat{C})$

3- Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés $(A, \tan\hat{A})$, $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, \tan\hat{C})$

COMPLEMENT : CENTRE D'INERTIE D'UNE PLAQUE HOMOGENE

Exercice 1



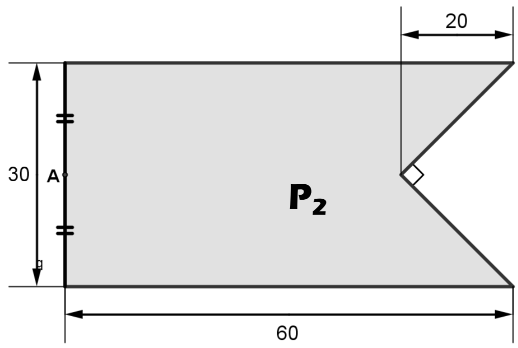
ABDE représente une plaque métallique homogène carrée de centre C
On retire la partie triangulaire BCD pour obtenir la plaque $\mathbf{P_1}$ pentagonale ABCDE
On appelle G le centre d'inertie de la plaque BCD et O celui de ABCDE.
On cherche a construire O.

1-Justifier que C est le barycentre de (G,1) et (O,3)

2-En déduire que O est le barycentre de (C,4) et (G,-1). Construire le point O .

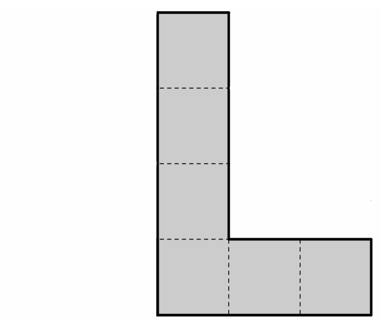
On peut ainsi , selon le même principe , déterminer le centre d'inertie d'une Plaque évidée , a l'aide du centre d'inertie de la plaque « avant évidemment » et du centre d'inertie de la «partie évidée »

3- On appliquant le même principe construire le centre d'inertie de la plaque homogène $\mathbf{P_2}$ si dessous

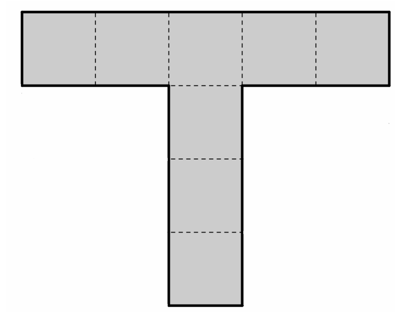


Exercice 2

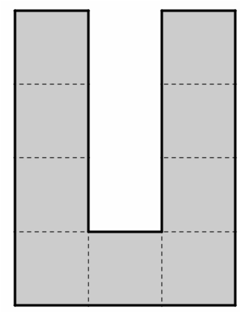
Construire le centre d'inertie de chacune des plaques homogènes colorés en gris si dessous :



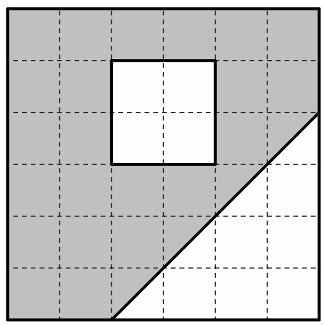
❶



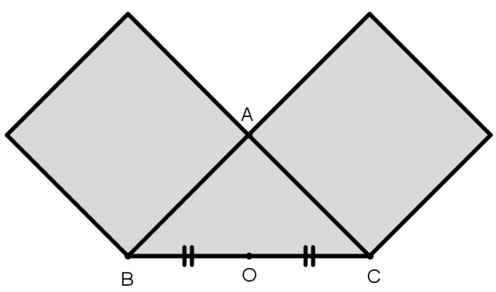
❷



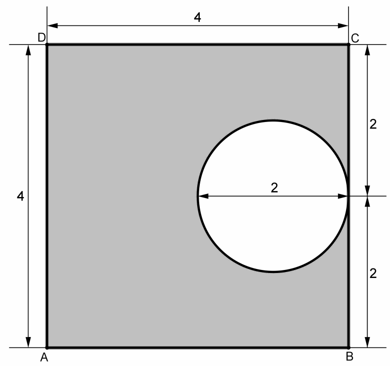
❸



❹



❺



❻