Série1 : Les nombres complexes (1)

Résultats importants !

Z= a + i b

Un nombre complexes	Partie réelle noté Re(z)	Un nombre vérifiant : $i^2=-1$	Partie imaginaire

Définitions :

- Le conjugué du nombre complexe : z = a+ib est $\overline{z}=a-ib$
- Le module du nombre complexe z = a+ib est : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- A tout nombre complexe z = a+ib on associe le point M(a,b) dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ qu'on appelle le point M d'affixe z et qu'on note M(z).

Propriétés :

- $z+\overline{z}=2Re(z)$; $z-\overline{z}=2i\times Im(z)$; $z\times\overline{z}=|z|^2$
- $|z|=|-z|=|\overline{z}|$ et $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
- $|z\times z'|=|z|\times|z'|$; $|z^n|=|z|^n$; $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$; $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.
- Z est réel $\Leftrightarrow$ Im(z)=0 $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$ $\Leftrightarrow$ $M\in(O,\vec{u})$
- z est imaginaire pure $\Leftrightarrow$Re(z)=0 $\Leftrightarrow z=-\overline{z} \Leftrightarrow$ $M\in(O,\vec{v})$

Géométriquement

- A tout point M(x,y) du plan on associe le nombre complexe z =x+iy.
- Le module d'un nombre complexe n'est que la distance entre le centre O el le point M d'affixe z.

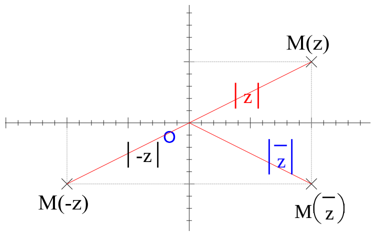
DANS ℂ	DANS LE PLAN
• Z = a+ib	• M(a,b)
• $Z_B - Z_A$	• $\overrightarrow{AB}$
• $\mid z \mid$	• OM
• $\mid Z_B - Z_A \mid$	• AB
• $Z_I=\frac{Z_A+Z_B}{2}$	• I est le milieu de [AB]
• $\frac{z_{\vec{U}}}{z_{\vec{V}}}$ est réel	• $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires
• $\frac{z_{\vec{U}}}{z_{\vec{V}}}$ est imaginaire pure	• $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux

Lycée « Chebbi »
Mornag

- *Année scolaire : 2012-2013*
- *Niveau : 4ème Maths*
- *Enseignant : Houssem Eddine Fitati*

«En mathématiques, les nombres complexes forment une extension de l'ensemble des nombres réels. Ils permettent notamment de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels.»

Les nombres complexes



Exercice n°1

Soit z_1= 1+i et z_2= -4+5i

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$2z_1-z_2$, $(z_2)^2$; $\left(\overline{z_1}\times z_2\right)^2$; $\dfrac{iz_1-2}{z_1+4}$; $\dfrac{\overline{z_1}\times\overline{z_2}}{z_2}$; $\left(\overline{z_1}\right)^{4n-1}$.

Exercice n°2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2i\bar{z}=0$

Montrer que les points images des solutions autres que O forment un triangle équilatéral.

Exercice n°3

Soit le nombre complexe : $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1- Montrer que : $j^2=\bar{j}=\dfrac{1}{j}$.
2- En déduire que : j^3 = 1 et que : $1 + j + j^2=0$
3- Soient a et b deux nombre complexes, montrer que : $a^3 - b^3 = (a-b)(a-jb)(a-j^2b)$.

Exercice n°4

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$,on considère le point A d'affixe –i

On désigne par M(z) le point d'affixe z. a tout point M(z) distinct de on associe le point M'(z')tel que : $z'=\dfrac{z-2i}{z+i}$

1- Déterminer les ensembles des points M dans les cas suivant :
   a- Z' est réel.
   b- M' est un point de l'axe des ordonnées .
   c- M' est un point du cercle trigonométrique.
2- Vérifier que : $(z'-i)(z+i)=-3i$
3- Montrer que si M est un point du cercle de centre A de rayon 2 alors M' est un point d'un cercle que l'on déterminera.

Exercice n°5

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$.

[unité graphique : 2 Cm].

On considère : * Le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$.

* Le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct càd : $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$.

* Le milieu Q de [OB].

1° - a) Démontrer que B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$.En déduire l'affixe q du point Q .

b) Déterminer l'affixe Z_k du point K tel que ABQK soit un parallélogramme .

c) Démontrer que $\frac{z_k - a}{z_k}$ est imaginaire pur .Qu'en déduit-on pour le triangle OKA .

Préciser la nature du quadrilatère OQAK.

2° - Placer les points A , B , Q , et K dans le plan .

3°-Soit C le point d'affixe c = $\frac{2a}{3}$.

a)Calculer $\frac{z_k - b}{z_k - c}$;Que peut-on déduire pour les points B , C et K .

b) Placer le point C sur la figure .

Exercice n°6

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.(Unité = 3 Cm).

On désigne par A le point d'affixe i . A tout point M du plan distinct de A d'affixe z , on associe le point M '

d'affixe z ' défini par z ' = $\frac{z^2}{i-z}$.

1° - Déterminer les points M confondus avec leur image M'.

2° - Etant donné un nombre complexe z distinct de i ; on pose :

z = x + i y et z ' = x ' + i y ' avec x , y , x ' , y ' des réels .

Montrer qu x ' = $\frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.

En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est situe sur l'axe des imaginaires purs .

Dessiner E .

3° - Trouver une relation simple liant les longueurs OM ; AM et OM ' .

En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M ' soient situés sur un même cercle de centre O .Dessiner F .

4° - Dans toute cette question , on considère un point M d'affixe z situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ .On désigne par G le centre de gravité du triangle (A M M') .Calculer l'affixe z G du point G en fonction de z .

Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon .