

EXERCICE N: 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Sans justification, le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

1) Les nombres complexes Z_1 et Z_2 tels que : $Z_1 + Z_2 = 2i$ et $Z_1 \cdot Z_2 = 1 - i$ sont les solutions de l'équation :

a) $Z^2 + 2iZ + 1 - i = 0$

b) $Z^2 - 2iZ - 1 + i = 0$

c) $Z^2 - 2iZ + 1 - i = 0$

2) Soit A et B deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives Z_A et Z_B .

Si A et B sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs, alors :

a) $Z_B = -Z_A$

b) $Z_B = \bar{Z}_A$

c) $Z_B = -\bar{Z}_A$

3) Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = (-2)^n + 3^n$, alors :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

c) (V_n) n'a pas de limite

4) La valeur moyenne de la fonction logarithme népérien sur $[1, e]$ est égal à :

a) $\frac{1}{e-1}$

b) 1

c) 0

EXERCICE N: 2 (4 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{-1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 < U_n < 0$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

b) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \ln(1 + U_n)$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = e^{-(2)^n \ln 2} - 1$.

c) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE N: 3 (4 points)

1) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $R(O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité : 2 cm), on donne

les point A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = \sqrt{3} + i$, $Z_B = 2i$ et $Z_C = -\sqrt{3} + i$.

a) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle (\mathcal{C}) de centre O.

b) Tracer le cercle (\mathcal{C}) et placer les points A, B et C dans le repère R.

c) Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $Z^2 - 2iZ - 4 = 0$.

3) Soit P la fonction définie sur \mathbb{C} par : $P(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - 8Z + 8i$.

a) Vérifier que $P(2i) = 0$.

b) Déterminer le nombre complexe α tel que : $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + \alpha Z - 4)$

c) Résoudre alors, dans \mathbb{C} , l'équation $P(Z) = 0$.

EXERCICE N: 4 (3.5 points)

A) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $10x - 3y = 5$.

1) Montrer que si (x, y) est une solution de (E) alors $(x \wedge y) = 1$ ou $(x \wedge y) = 5$.

2) a) Vérifier que : $(5, 15)$ est une solution de (E) .

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .

B) Un jeu est organisé de la façon suivante :

le joueur tire une boule dans un panier où sont placés 10 boules blanches et 10 boules noires .

Si le joueur a obtenu une boule blanche, il gagne 30 Dinars si non il perd 9 Dinars .

Un joueur a gagné une somme de 15 Dinars en tirant X boules blanches et Y boules noires .

1) Ecrire une équation reliant X et Y .

2) Déterminer alors les valeurs de X et Y .

EXERCICE N: 5 (5.5 points)

A) Soit la suite (J_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $J_n = \int_1^e x \ln^n(x) dx$.

1) a) Montrer que : $J_1 = \frac{e^2 + 1}{4}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $J_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n$.

B) Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (\mathcal{C}) de la fonction f définie sur $[1; 3]$ par : $f(x) = x \ln^2(x)$ et la demi-tangente à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1 . On considère la droite Δ d'équation : $y = x$ et la droite (\mathcal{D}) d'équation : $y = 1 - x$.

1) En utilisant le graphique :

a) Montrer que f réalise une bijection de $[1; 3]$ sur $[0; 3 \ln^2(3)]$.

b) Résoudre dans $[1; 3]$ l'équation : $f(x) = f^{-1}(x)$.

2) Tracer la courbe (\mathcal{C}') de la fonction f^{-1} en précisant la demi-tangente au point d'abscisse 0 .

3) a) En utilisant la suite (J_n) , calculer l'aire \mathbf{A} de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) ,

l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e$.

b) En déduire l'aire \mathbf{A}' de la partie du plan limitée par la droite (\mathcal{D}) et les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .

Nom et Prénom :

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

