Lycée Houmt Souk Jerba Prof: Loukil Mohamed	Devoir de Synthèse N : 1 Durée : 2 Heures	4 Sc - informatique 08 Décembre 2010

EXERCICE N : 1 (8 points)

A) On considère les matrices : $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer dét (**M**) et déduire que M est inversible .

b) Calculer **M** x **N** + **M** .

c) Déduire alors que la matrice inverse de **M** est : $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2) En utilisant la matrice M^{-1}, résoudre le système suivant : **(S)** $\begin{cases} 4x + 2y + z = -8 \\ y + z = 2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ + c$ où a, b et c sont des réels .

1) Montrer que si $f(2) = 0$ et $f(1-i) = 0$ alors (a, b, c) est la solution du système **(S)** .

2) Dans la suite on prend : $f(Z) = Z^3 - 4Z^2 + 6Z - 4$.

a) Vérifier que pour tout nombre complexe Z , on a : $f(Z) = (Z-2)(Z^2 - 2Z + 2)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$.

C) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les point A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2$ et $Z_B = 1 - i$.

1) Montrer que le triangle OAB est rectangle en B .

2) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses .

a) Déterminer alors Z_C l'affixe du point C .

b) Montrer que OBAC est un carré .

<u>EXERCICE N : 2</u> ***(12 points)***

A) *Soit la fonction f définie sur IR par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1} & \text{si } x<0 \\ f(x) = x^2 - 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2-4} - x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

1) a) *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *. (Interpréter graphiquement le résultat obtenu) .*

b) *Vérifier que pour tout* $x \in]-\infty ; 0[$ *;* $f(x) = x + 4 + \dfrac{4}{x-1}$ *.*

c) *Déduire que la courbe **(C f)** admet au voisinage de* $-\infty$ *une asymptote* Δ *.*

2) *Montre que f est continue en 2 .*

3) a) *Montrer que f est dérivable en 0 .*

b) *Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2 .*

4) *Calculer* $f'(x)$ *pour chacun des intervalles* $]-\infty ; 0[$ *et* $]0 ; 2[$ *.*

B) *Dans l'annexe ci-jointe , on a représenté dans le repère orthonormé* ***R*** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ***une partie*** *de la courbe **(C f)** représentative de f .*

1) *Représenter* Δ *et les tangentes ou demi-tangentes aux points d'abscisses 0 ,* $\frac{3}{2}$ *et 2 .*

2) *Compléter le traçage de **(C f)** ainsi que ses branches infinies .*

C) *Soit g la restriction de f à l'intervalle* $[2 ; +\infty[$ *. On désigne par **(Cg)** sa courbe dans le repère **R** .*

1) *Justifier que g est dérivable sur* $]2 ; +\infty[$ *et que :* $g'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2-4}\,(x+\sqrt{x^2-4})}$ *.*

2) *Montrer que g est une bijection de* $[2 ; +\infty[$ *sur* $[-2 ; 0[$ *.*

3) *Justifier que* g^{-1} *est dérivable sur* $[-2 ; 0[$ *.*

4) *Tracer **(*** Cg^{-1} ***)*** *la courbe représentative de* g^{-1} *dans le même repère **R** .*

5) *Expliciter* $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in [-2 ; 0[$ *.*

Nom et Prénom **:**

Annexe à rendre avec la copie