

Correction du devoir de contrôle n°1
2011 – 2012

Exercice 1 : (4pts)

- 1) la fonction $x \mapsto \frac{x^2-1}{|x-2|-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$
 ($|x-2|-1=0 \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x-2=1$ ou $x-2=-1 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=1$)
- 2) La fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+3}$ est ni paire ni impaire.
 (car si $x \in [1, +\infty[$, $-x \notin [1, +\infty[$)
- 3) L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$ est une droite
- 4) $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PI^2 - \frac{1}{4}MN^2$ (Théorème de la médiane) $= 4^2 - \frac{1}{4} \times 4^2$
 $= 16 - 4 = 12.$

Exercice 2 : (4pts)

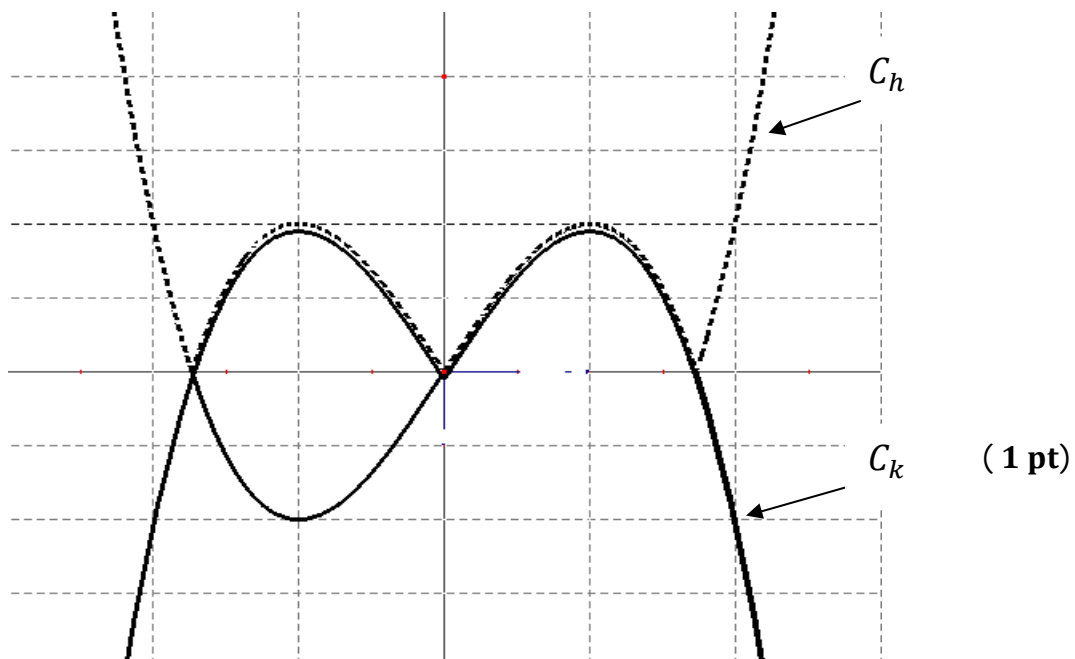
- 1) f est impaire car sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. (1pt)
- 2) Le minimum de f sur $[-2,2]$ est -2 . Le maximum de f sur $[-2,2]$ est 2 . (1pt)

3)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	↘	↗	↘	

 (1 pt)

4)



Exercice 3 : (4pts):

- 1) f est une fonction polynome donc continue en $\frac{3}{2}$. (1 pt)
- 2) • $x \mapsto x - 1$ est une fonction affine donc continue en 0 $|x - 1|$ est continue en 0
• $x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction polynome donc continue en 0
 $\Rightarrow x \mapsto |x - 1|(x^2 + 1)$ est continue en 0
• $h: x \mapsto x^3 - x^2 + 1$ est une fonction polynome donc continue en 0.
• $h(0) = 1 \neq 0$. D'où f est continue en 0 (1,5 pts)
- 3) $x \mapsto \frac{2x-11}{x^4+1}$ est une fonction rationnelle définie en tout réel
($x^4 + 1 \neq 0 \forall x$)
donc continue en 2011 donc f est continue en 2011. (1,5 pts)

Exercice 4 : (8pts)

- 1) $(\vec{ED} + \vec{DA}) \cdot (\vec{EC} + \vec{CB}) = \vec{ED} \cdot \vec{EC} + \vec{ED} \cdot \vec{CB} + \vec{DA} \cdot \vec{EC} + \vec{DA} \cdot \vec{CB}$
 $= \vec{ED} \cdot \vec{EC} + \vec{DA} \cdot \vec{CB}$ ($\vec{ED} \cdot \vec{CB} = 0$ et $\vec{DA} \cdot \vec{EC} = 0$) (0,5pt)
- 2) a) • $\vec{ED} \cdot \vec{EC} = -ED \times EC = -1 \times 3 = -3$ (0,5pts)
• $\vec{DA} \cdot \vec{CB} = DA \times CB = 3 \times 4 = 12$ (0,5pts)
• $\vec{EA} \cdot \vec{EB} = \vec{ED} \cdot \vec{EC} + \vec{DA} \cdot \vec{CB} = -3 + 12 = 9$ (0,5pts)
b) On a $EA^2 = ED^2 + AD^2 = 1 + 9 = 10$ donc $EA = \sqrt{10}$ (0,5pts)
de même $EB^2 = EC^2 + CB^2 = 9 + 16 = 25$ donc $EB = 5$ (0,5pts)
c) $AB^2 = 4^2 + 1^2 = 17$ donc $AB = \sqrt{17}$
- 3) a) $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{CH} \cdot \vec{CB} = CH \times CB = 3 \times 4 = 12$
 $\vec{CA} \cdot \vec{CE} = \vec{CE} \cdot \vec{CD} = CE \times CD = 12$ (1pt)
On a $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{CA} \cdot \vec{CE} \Leftrightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CB} - \vec{CA} \cdot \vec{CE} = 0 \Leftrightarrow \vec{CA} \cdot (\vec{CB} - \vec{CE}) = 0$
 $\Leftrightarrow \vec{CA} \cdot \vec{EB} = 0 \Leftrightarrow (CA) \perp (EB)$ (0,5pt)
- 4) a) On a $AB^2 + AD^2 = 17 + 9 = 26$ donc $A \in C$. (0,5pts).
b) $MB^2 + MD^2 = \|\vec{MB}\|^2 + \|\vec{MD}\|^2 = \|\vec{MO} + \vec{OB}\|^2 + \|\vec{MO} + \vec{OD}\|^2$
 $= (MO^2 + OB^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{OB}) + MO^2 + OD^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{OD}$
 $= 2MO^2 + OB^2 + OD^2 + 2\vec{MO} \cdot (\vec{OB} + \vec{OD}) = 2MO^2 + OB^2 + OD^2$
 $= 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}$ (1pt)

$$c) M \in C \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{BD^2}{2} = 26 \Leftrightarrow 2MO^2 = 26 - 16 = 10 \Leftrightarrow MO = \sqrt{5}.$$

$$\text{Ansi } C = C_{(0, \sqrt{5})} \text{ (1pt)}$$

5) Soit le repère orthonormé (A, \vec{i}, \vec{j}) tels que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$ et $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

On a $M(x, y)$, $B(4, -1)$ et $D(0, 3)$.

$$MB^2 + MD^2 = (4 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (0 - x)^2 + (3 - y)^2 = 26$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8x + x^2 + 1 + 2y + y^2 + x^2 + 9 - 6y + y^2 = 26$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 2y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

c'est l'équation du cercle de centre $O(2, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$ (1pt).