

EXERCICE N: 1 (9 points)

A) Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 0]$ par : $g(x) = \sqrt{x^2+4} - x$.

1) Montrer que pour tout $x \in] -\infty; 0]$ on a : $x^2+4 \geq (x+2)^2$ et $\sqrt{x^2+4} \geq x+2$.

2) En déduire que la fonction g est minorée par 2.

3) 2 est-il un minimum absolu de g sur $] -\infty; 0]$? justifier la réponse .6

B) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f . justifier la réponse

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 2.

3) a) Sans résoudre l'équation : $f(x) = 3$, montrer qu'elle admet au moins une solution α dans $[-1; 1]$

b) On admet que α est unique.

En utilisant la méthode par dichotomie, déterminer un intervalle d'amplitude 0.5 contenant α .

4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x]$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

EXERCICE N: 2 (3.5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct.

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $(\overline{CB}, \overline{CA}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$.

1) a) Montrer que $(\overline{BC}, \overline{BA}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$.

b) Construire le triangle ABC .

2) On désigne par I le milieu de $[BC]$. La médiatrice Δ de $[BC]$ coupe (AC) en J .

a) Donner la mesure principale de $(\overline{BC}, \overline{BJ})$.

b) Montrer que les points A, B, I et J appartiennent à un même (\mathcal{C}) que l'on précisera.

3) a) Montrer que $(\overline{JA}, \overline{JB}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$.

b) Déduire la construction de l'ensemble $\Gamma = \{ M \in P \text{ tels que } (\overline{MA}, \overline{MB}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi) \}$.

EXERCICE N: 3 (7.5 points)

A) Soit ABC un triangle rectangle en B tels que : $AB = 5$ et $BC = 2$. E un point du $[AB]$ tel que $AE = 3$,
 D le projeté orthogonal de E sur (AC) et $F = S_B(C)$.

1) Calculer $\vec{AE} \cdot \vec{AC}$ puis déduire AD .

2) a) Calculer $\vec{AF} \cdot \vec{AB}$, $\vec{AF} \cdot \vec{BC}$ puis déduire que $\vec{AF} \cdot \vec{AC} = 21$.

b) Déterminer alors la valeur du $\cos(\widehat{CAF})$.

B) On pose : $\Delta = \{ M \in P \text{ tels que : } 2\vec{MA} \cdot \vec{AC} = 3\vec{MB} \cdot \vec{CA} \}$

$$\mathcal{E} = \{ M \in P \text{ tels que : } 2MA^2 + 3MB^2 = 50 \}$$

1) Vérifier que E est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$.

2) Montrer que Δ est une droite que l'on précisera .

3) a) Montrer que pour tout $M \in P$; $2MA^2 + 3MB^2 = 5ME^2 + 30$.

b) Déduire alors la nature de \mathcal{E} et ses caractéristiques .

C) Soit $R (B ; \frac{\vec{BA}}{5} ; \frac{\vec{BC}}{2})$ un repère orthonormé du plan .

1) Déterminer les coordonnées de A , C et E dans le repère R .

2) Ecrire une équation cartésienne de chacun des ensembles Δ et \mathcal{E} .