

Dipôle RL

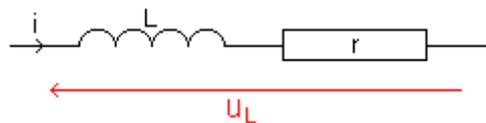
I. La bobine en convention récepteur

1. Représentation symbolique



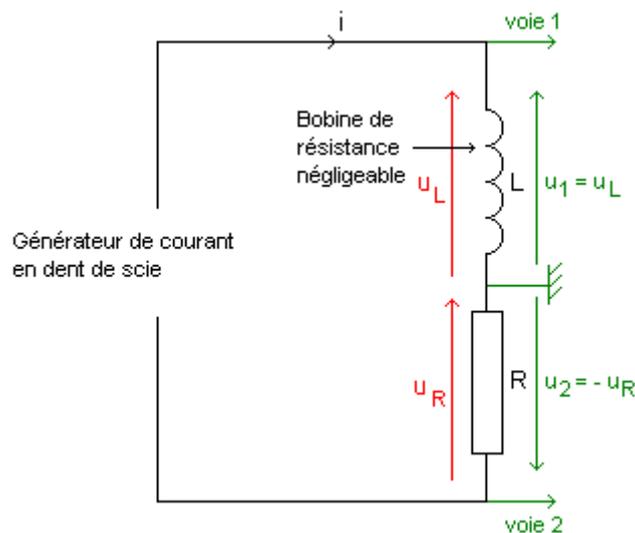
Une bobine est constituée d'un enroulement serré de fil conducteur enrobé d'un matériau isolant. Ce fil conducteur présente le plus souvent une résistance r de faible valeur.

Une bobine de résistance r est équivalente à l'association en série d'une bobine de résistance nulle et d'un conducteur ohmique de résistance r , nous utiliserons la représentation symbolique suivante:



2. Etude expérimentale

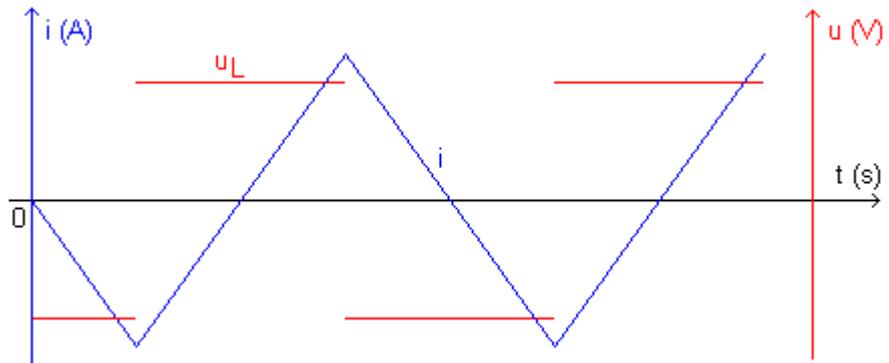
On réalise le montage ci-dessous.



L'ordinateur permet de tracer les courbes $u_L=f(t)$ et $i=f(t)$ (car

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{-u_2}{R}$$

). On obtient le graphique suivant:



3. Inductance de la bobine

Pendant une demi-période le courant i est de la forme $i = a \cdot t + b$

$$\frac{di}{dt} = a = \text{cte}$$

et de ce fait, $u_L = k \cdot \frac{di}{dt}$. La tension aux bornes de la bobine

$$u_L = k \cdot \frac{di}{dt}$$

étant elle aussi constante, elle peut s'écrire $u_L = k \cdot \frac{di}{dt}$. Le coefficient k dépend de la bobine. On posera $k = L$. L s'appelle inductance de la bobine et s'exprime en Henrys (H), d'où:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

avec {

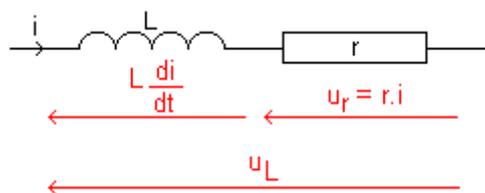
u_L : tension aux bornes de la bobine en volts (V).

L : inductance de la bobine en henrys (H).

di/dt : dérivée par rapport au temps de l'intensité du courant traversant la bobine en ampères par seconde ($A \cdot s^{-1}$).

4. Tension aux bornes de la bobine

Si la résistance de la bobine n'est pas négligeable, celle-ci peut-être considérée comme l'association série d'un conducteur ohmique et d'une bobine de résistance nulle.



La tension aux bornes de la bobine s'écrit alors:

$$u_L = ri + L \frac{di}{dt}$$

avec {

u_L : tension aux bornes de la bobine en volts (V).

L : inductance de la bobine en henrys (H).

r : résistance de la bobine en ohms (Ω).

i : intensité du courant traversant la bobine en ampères (A).

di/dt : dérivée par rapport au temps de l'intensité du courant traversant la bobine en ampères par seconde ($A \cdot s^{-1}$).

Remarques

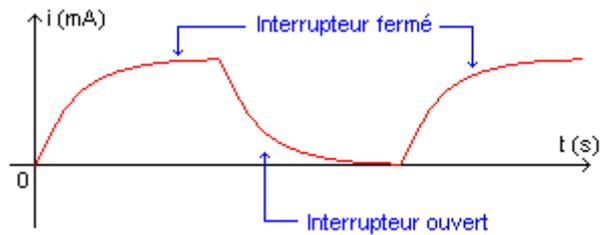
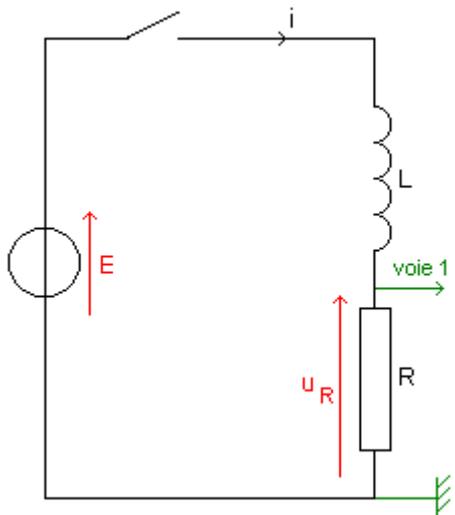
- Dans le cas où la bobine est une inductance pure, sa résistance est nulle et la tension à ses bornes s'écrit $u_L = L \frac{di}{dt}$.
- En régime permanent, le courant est constant ($i=cte$), la tension aux bornes de la bobine s'écrit $u_L=ri$: la bobine se comporte comme un conducteur ohmique.

II. Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension

1. Etude expérimentale

On réalise le montage ci-contre:

L'ordinateur permet de tracer la courbe $i=f(t)$ (car $i = \frac{u_R}{R}$). On obtient le graphique suivant:



Interprétation:

- *Interrupteur fermé:* Le courant s'installe progressivement: la bobine s'oppose à l'apparition de celui-ci.
- *Interrupteur ouvert:* Le courant diminue progressivement: la bobine s'oppose à la disparition de celui-ci.

Conclusion: Une bobine s'oppose aux variations de l'intensité du courant dans le circuit où elle se trouve.

2. Réponse en courant

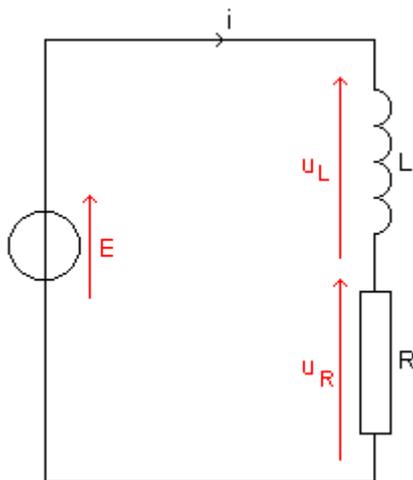
a. Equation différentielle

D'après la loi d'additivité des tensions:

$$u_R + u_L = E \Rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} = E \Rightarrow i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = \frac{E}{R}$$

b. Solution de l'équation différentielle

Remarque préalable: en régime permanent, le courant est constant.



$$i = \text{cte} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i = \frac{E}{R}$$

Vérifions que $i = A + Be^{-t/\tau}$ est solution de l'équation différentielle.

$di/dt = -B/\tau \cdot e^{-t/\tau}$. L'équation différentielle s'écrit alors:

$$A + Be^{-t/\tau} + L/R \cdot (-B/\tau \cdot e^{-t/\tau}) = E/R \Rightarrow A + B \cdot (1 - L/R\tau) \cdot e^{-t/\tau} = E/R$$

Cette équation est vérifiée quel que soit le paramètre t , d'où le système:

$$\begin{cases} A = E/R \\ 1 - L/R\tau = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = E/R \\ \tau = L/R \end{cases}$$

On en déduit que l'intensité du courant s'écrit $i = E/R + B \cdot e^{-t/\tau}$ avec $\tau = L/R$.

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, à } t = 0, i = 0 &\Rightarrow 0 = E/R + B \cdot e^0 \\ &\Rightarrow B = -E/R \\ &\Rightarrow i = E/R - E/R \cdot e^{-t/\tau} \\ &\Rightarrow i = E/R \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

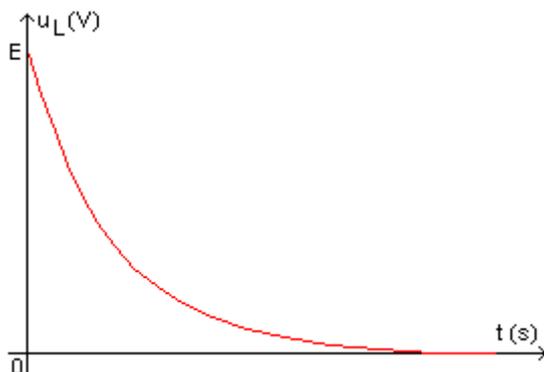
Définition: La grandeur $\tau = L/R$ est appelée constante de temps du circuit. Son unité est la seconde (s).

Remarque: analyse dimensionnelle

$$\begin{aligned} u_R = R \cdot i &\Rightarrow [R] = [U] \cdot [I]^{-1} \\ u_L = L \cdot di/dt &\Rightarrow [L] = [U] \cdot [T] \cdot [I]^{-1} \\ [L/R] = \frac{[L]}{[R]} &\Rightarrow [L/R] = \frac{[U] \cdot [T] \cdot [I]^{-1}}{[U] \cdot [I]^{-1}} \\ &\Rightarrow [L/R] = [T] \end{aligned}$$

L/R est homogène à un temps.

Remarque: La constante de temps fournit un ordre de grandeur de la durée de la réponse d'un circuit RL.



3. Réponse en tension

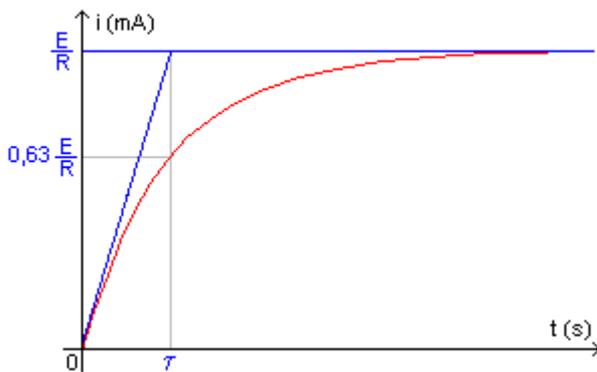
$$\begin{aligned} u_L = L \cdot di/dt &= u_L = L \cdot E/R \cdot (1/\tau \cdot e^{-t/\tau}) \text{ avec} \\ &> \tau = L/R \\ &= \\ &> u_L = E \cdot e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Remarque: Détermination de u_L à partir de la loi des tensions:

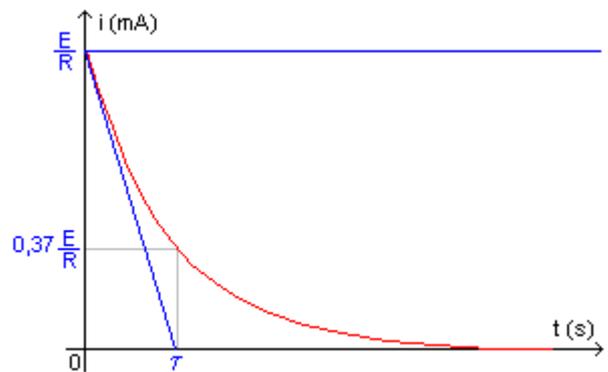
$$\begin{aligned} u_L + u_R &= E \Rightarrow & u_L &= E - u_R \\ &\Rightarrow & u_L &= E - R.i \\ &\Rightarrow u_L &= E - R.E/R.(1 - e^{-t/\tau}) \\ &\Rightarrow & u_L &= E.e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

4. Détermination de la constante de temps

- Après une durée τ , l'intensité est égale à 63% de sa valeur maximale.
- Après une durée 5τ , l'intensité est égale à 99% de sa valeur maximale.



Apparition du courant lors de la fermeture du circuit



Disparition du courant lors de l'ouverture du circuit

III. Énergie emmagasinée dans une bobine

Une bobine d'inductance L traversée par un courant i emmagasine l'énergie magnétique:

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2$$

avec {

- E_L : énergie emmagasinée par la bobine en joules (J).
- L : inductance de la bobine en henrys (H).
- i : intensité du courant traversant la bobine en ampères (A).