LYCEE THELEPTE

Niveau : 4 ème maths

DEVOIR DE CONTROLE N°1 En Mathématiques

Enseignant : *H. Salem*

Durée : 2 heures

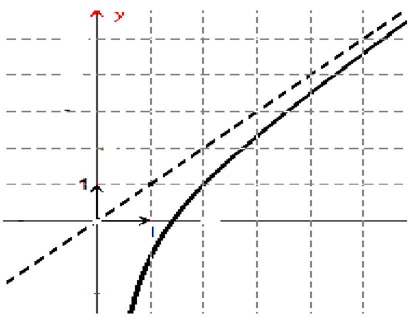
Le 09 – 11 – 2011

Exercice 1 : (3pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Justifier votre réponse .

1) On pose $U_n = n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n\pi}\right)$
   a) (U_n) est divergente.
   b) (U_n) converge vers $\frac{1}{\pi}$.
   c) (U_n) converge vers $\frac{-1}{\pi}$.

2) La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. La droite Δ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
   $\lim_{x\to 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) =$:
   a) 1
   b) 0
   c) $+\infty$



3) Si $Z = 1 + i$ alors $Z^{2012} =$:
   a) 2^{1006}
   b) -2^{1006}
   c) i

Exercice 2 : (5pts)

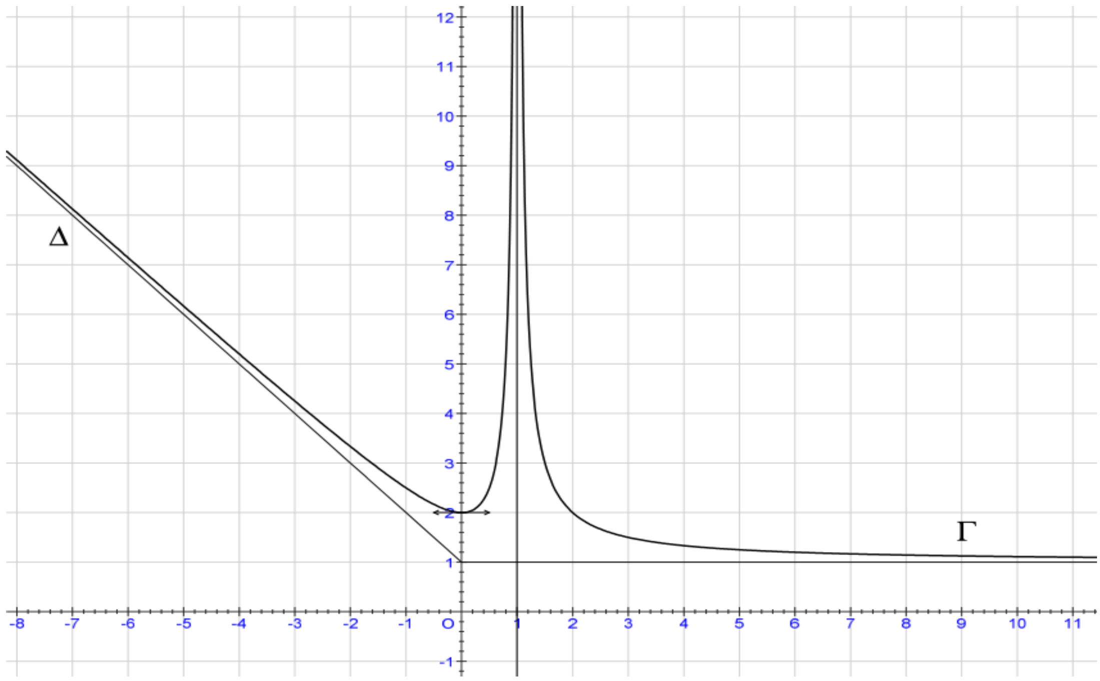
Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)$. $n \geq 1$

1) a) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
   b) Montrer que (U_n) est croissante.
2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c) En déduire que (U_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

Exercice 3 : (5pts)

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur IR\ {1} .On sait que la droite Δ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$. Γ admet deux autres asymptotes d'équations respectives x = 1 et y = 1.



1) a) Par une lecture graphique déterminer :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to1} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \begin{cases} f \circ f(x) \ ; \ x \neq 1 \\ 1 \quad\quad\quad ; \ x = 1 \end{cases}$

a) Déterminer g(2), g(0), $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Montrer que g est continue sur IR.

c) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, 1[$ par g.

Exercice 4 : (7pts)

Pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation $(E_\theta): z^2 - z + e^{2i\theta} - ie^{i\theta} = 0$.

1) a) Calculer $\left(1 + 2ie^{i\theta}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives 1, $z' = 1 + e^{i\theta}$ et $z'' = -ie^{i\theta}$.

   a) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

   b) Montrer que le quadrilatère OM'AM'' est un parallélogramme.

   c) Déterminer θ pour que OM'AM'' soit un losange.

3) Soit l'équation (E) : $(z + 2i)^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

   a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $4\sqrt{2}(1 + i)$.

   b) Déterminer les solutions de (E) sous forme algébrique.

Bon Travail

Correction

Exercice 1 : (3 pts)

Barème : Pour chaque question : (0.5 pt) pour la réponse et (0.5pt) pour la justification.

1) a) (U_n) diverge. En effet,

$$U_{2n} = 2n\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}{\frac{1}{2n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}$$

$$U_{2n+1} = (2n+1)\sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right] = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right]}{-\frac{1}{(2n+1)\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_n U_{2n} \neq \lim_n U_{2n+1}$$

2) a) $\lim_{x\to0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \lim_{x\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$

(car la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$).

3) b) $Z^{2012} = ((1+i)^2)^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$

ou encore, $Z^{2012} = (1+i)^{2012} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2012} = 2^{1006}e^{i503\pi} = -2^{1006}$.

Exercice 2 : (5 pts)

1) a) $U_1 = 1$, $U_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$, $U_3 = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$. (1,5 pts)

b) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

donc (U_n) est croissante. (0, 5 pt)

2) a) $\forall\ k \geq 2,\ k^2 \geq k^2 - k \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k}$ or $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ d'où $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. (1 pt)

b) $\forall n \geq 2,\ U_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}\right) - \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$

$\Rightarrow U_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$. (1 pt)

c) (U_n) croissante et majorée par 2 donc converge vers un réel (0,5 pt)

De plus $U_3 \leq U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ donc $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$. (0,5 pt)

Exercice 3 : (5 pts)

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = -1$ car Δ: y=−x−1est une asymptote à (C_f) au voisinage de +∞.

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$. (1pt).

b) T.V de f : (1pt).

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	−		+	‖	−	
f	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

2) a) $g(2) = f\circ f(2) = f(2) = 2$, $g(0) = f\circ f(0) = f(2) = 2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (1pt).

b) g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car f continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(\mathbb{R}\backslash\{1\}) =]1,+\infty[\subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1} f\circ f(x) = 1 = g(1)$ donc g continue en 1.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$. (1pt).

c) $g(]-\infty,1[) = f\circ f(]-\infty,1[) = f([2,+\infty[) =]1,2]$ (1pt)

Exercice 4 : (7pts)

1) a) $(1 + 2ie^{i\theta})^2 = 1 + 4ie^{i\theta} - 4e^{2i\theta}$. (0,5pt)

b) $\Delta = (-1)^2 - 4(e^{2i\theta} - ie^{i\theta}) = (1 + 2ie^{i\theta})^2$

$Z' = \frac{1+1+2ie^{i\theta}}{2} = 1 + ie^{i\theta}$ et $Z'' = \frac{1-(1+2ie^{i\theta})}{2} = -ie^{i\theta}$. (1pt)

2) a) $Z' = 1 + ie^{i\theta} = 1 + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. (0,75pt)

$2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$, car si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$Z'' = -ie^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$. (0,75pt)

b) aff $(\overrightarrow{OM'}) = Z' = 1 + ie^{i\theta}$. aff $(\overrightarrow{M''A}) = 1 - Z'' = 1 - (-ie^{i\theta}) = 1 + ie^{i\theta}$.

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''A} \Leftrightarrow$ OM'AM'' est un parallélogramme. (1pt)

c) OM'A M'' est un losange si et seulement si OM'= OM'' $\Leftrightarrow |Z'| = |Z''|$

$\Leftrightarrow \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| = \left|e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right| \Leftrightarrow\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right)$ (1pt)

3) a) $4\sqrt{2}(1+i) = 8\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1+i)$ sont définies par les $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0,1,2\}$. $Z_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$, $Z_1 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$, $Z_2 = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$(1pt)

b) $(Z+2i)^3 = 4\sqrt{2}(1+i) \Leftrightarrow Z+2i$ est une racine cubique de $4\sqrt{2}(1+i)$

$\Leftrightarrow Z+2i = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z+2i = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ou $Z+2i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow Z = 2cos\frac{\pi}{12} + i(2sin\frac{\pi}{12} - 2)$ ou $Z = 2cos\frac{3\pi}{4} + i(2sin\frac{3\pi}{4} - 2)$

ou $Z = 2cos\frac{17\pi}{12} + i(2sin\frac{17\pi}{12} - 2)$.

Or $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2\right),\ -\sqrt{2} + i(\sqrt{2}-2),\ -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2\right) \right\}$(1pt)