

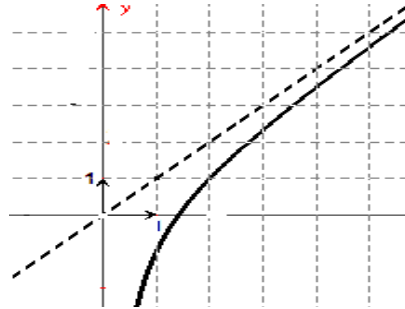
**Exercice1 : (3points)**

Donner la réponse correcte . Aucune justification n'est demandée.

- 1) La courbe (C) ci – dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur  $]0, +\infty[$ . La droite  $\Delta$  est une asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = :$$

- a) 1  
b) 0  
c)  $+\infty$



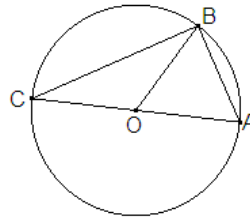
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Dans la figure ci – dessous, (C) est un cercle de centre O milieu de [AC] et B est un point de (C) tel que OAB est un triangle équilatéral.

On pose a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

$$\frac{b-c}{b-a} = :$$

- a)  $-2i$   
b)  $-i$   
c)  $-i\sqrt{3}$



- 3) Si une suite  $(U_n)$  est divergente alors l'une au moins des suites  $(U_{2n})$  ou  $(U_{2n+1})$  est divergente.  
a) vrai ; b) faux

**Exercice 2 : (3 points)**

Soit g la fonction définie sur IR par  $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ .

- 1) Dresser le tableau de variation de g sur IR.  
2) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]1, 2[$ .  
3) Déterminer le signe de g(x) sur IR.

**Exercice 3 : (6points)**

On considère la suite  $(U_n)$  défini par  $U_0 = 1$  et pour tout entier n ;

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2} .$$

- 1) a) Montrer que pour tout entier n,  $U_n > 0$ .  
b) Montrer que  $(U_n)$  est décroissante.  
c) Déduire que  $(U_n)$  est convergente et détermine sa limite.  
2) soit  $(V_n)$  défini sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}}$ .

- iiiiiii) Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique de raison égale à 1.  
 b) On déduit  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$  et retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .
- 3) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$ .
- a) Montrer que la suite  $(S_n)$  est croissante.  
 b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,  $U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .  
 c) Montrer que  $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ . En déduire que la suite  $(S_n)$  est convergente et donner un encadrement de sa limite.

**Exercice 4 : (8 points)**

Pour tout réel  $\theta$  de  $]-\pi, \pi]$ , On considère la fonction  $f_\theta$  définie par :

pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\}$  ,  $f_\theta(z) = \frac{1 + ze^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}$ .

- 1) Vérifier que si  $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$  alors  $f_\theta$  est constante.  
 2) On pose  $\theta = 0$ .  
 a) Montrer que pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  :  
 $f_0(z) = z'$  si et seulement si  $z = -f_0(-z')$ .  
 b) Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  ;  $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ .  
 c) Déterminer les racines carrées de  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ .  
 d) Utiliser les questions a), b) et c) pour résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation:  
 $(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$ .
- 3) On suppose que  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $A, B, M$  et  $M'$  les points d'affixes respectives  $e^{i\theta}, -e^{-i\theta}, z$  et  $z' = f_\theta(z)$

- a) Montrer que pour tout  $M \neq A$  et  $M \neq B$ ,  $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv \theta + \pi + (\widehat{MA}, \widehat{MB})[2\pi]$ .  
 b) Pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  lorsque  $M'$  décrit la demi-droite d'équation :  $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$ .

**Bon Travail**

## Correction

### Exercice 1 : (3 points)

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$  car la droite  $\Delta : y = x$  est une asymptote oblique à (C) au voisinage de  $+\infty$

2) c)  $\frac{b-c}{b-a} = \left| \frac{b-c}{b-a} \right| e^{i(\widehat{BA, BC})} = \frac{BC}{BA} e^{-\frac{i\pi}{2}}$ . Or  $\frac{BC}{BA} = \frac{BC}{\frac{1}{2}AC} = 2 \frac{BC}{AC} = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ .

Ainsi  $\frac{b-c}{b-a} = \sqrt{3} e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i\sqrt{3}$ .

3) Faux. Contre exemple :  $U_n = (-1)^n$ .

$(U_n)$  est divergente mais  $(U_{2n})$  et  $(U_{2n+1})$  convergent respectivement vers 1 et  $-1$ .

### Exercice 2 : (3 points)

$g(x) = 4x^3 - 3x - 8.$

1)  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = 12x^2 - 3$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0
$g(x)$		-	-7	-	-9
				+	

2) D'après le tableau de variation de  $g : g(x) < 0 \quad \forall x \in ]-\infty, \frac{1}{2}[$ .

Sur  $]\frac{1}{2}, +\infty[$ ,  $g$  est continue et strictement croissante donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

De plus  $g(1) = -7 < 0$  et  $g(2) = 18 > 0$ , donc  $1 < \alpha < 2$ .

3)

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

### Exercice 3 : (6 points)

1) a) Montrons que pour tout entier  $n$ ,  $U_n > 0$ .

Pour  $n = 0$ ,  $U_0 = 1 > 0$ .

Supposons que  $U_n > 0$  et montrons que  $U_{n+1} > 0$ .

Il est clair que si  $U_n > 0$ ,  $U_{n+1} = \frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2} > 0$ . D'où  $U_n > 0 \quad \forall n \geq 0$ .

b)  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{(1+\sqrt{U_n})^2} < 1$  D'où  $(U_n)$  est décroissante.

c)  $(U_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel  $L$  tel que

$$L \geq 0 \text{ et } \frac{L}{(1+\sqrt{L})^2} = L \Leftrightarrow 1 + \sqrt{L} = 1 \Leftrightarrow L = 0.$$

2) a) Pour tout entier  $n$ ,  $V_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{U_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2}}} = \frac{1+\sqrt{U_n}}{\sqrt{U_n}} = \frac{1}{\sqrt{U_n}} + 1 = 1 + V_n$  donc

$(V_n)$  est une suite géométrique de raison 1.

b) Pour tout entier  $n$ ,  $V_n = V_0 + n = 1 + n$ .

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3)  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} U_k - \sum_{k=0}^n U_k = U_{n+1} > 0.$$

D'où  $(S_n)$  est croissante.

b) On remarque que  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ . Or  $U_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+n}$ . Ainsi

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

c) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k = U_0 + \sum_{k=1}^n U_k \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\Rightarrow S_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

$(S_n)$  est croissante et  $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  donc  $(S_n)$  converge vers un réel  $\ell$  tel que  $0 \leq \ell \leq 2$ .

#### Exercice 4 : (8 points)

1)  $f_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1 + ze^{-\frac{i\pi}{2}}}{e^{-\frac{i\pi}{2}} - z} = \frac{1 - iz}{-i - z} = \frac{i(-i-z)}{-i-z} = i$ ,  $f_{\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1 + ze^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{2}} - z} = \frac{1 + iz}{i - z} = \frac{i(-i+z)}{i-z} = -i$ .

2) Pour  $\theta = 0$ ,  $f_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$ .

a) Pour tous  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z' = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z' - zz' = 1 + z$

$$\Leftrightarrow z(1+z') = z' - 1 \Leftrightarrow z = \frac{z'-1}{z'+1}. \text{ Or } -f_0(-z') = -\frac{1-z'}{1+z'} = \frac{z'-1}{z'+1}.$$

D'où  $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z = -f_0(-z')$ .

b) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;  $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{1 + e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{-2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{-i \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{i}{\tan \frac{\alpha}{2}}$ .

Rq :

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$1 + e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left( e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

$$1 - e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left( e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = -2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

c) Soit  $u^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \Leftrightarrow u = e^{\frac{i\pi}{8}}$  ou  $u = -e^{\frac{i\pi}{8}} = e^{\frac{i9\pi}{8}}$ .

d)  $(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) (1-z)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{i\pi}{8}}$  ou  $\frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{i9\pi}{8}}$   
 (d'après 2) c)  $\Leftrightarrow f_0(z) = e^{\frac{i\pi}{8}}$  ou  $f_0(z) = e^{\frac{i9\pi}{8}} \Leftrightarrow z = -f_0\left(e^{\frac{i\pi}{8}}\right)$  ou  $z = -f_0\left(e^{\frac{i9\pi}{8}}\right)$   
 (d'après 2) a)  $\Leftrightarrow z = -\frac{i}{\tan(\frac{\pi}{8})}$  ou  $z = -\frac{i}{\tan(\frac{9\pi}{8})} = \frac{i}{\tan(\frac{\pi}{8})}$  (d'après 2) b).

3) a)  $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}, f_\theta(z) = \frac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} = \frac{e^{i\theta}(e^{-i\theta}+z)}{e^{i\theta}-z} \Leftrightarrow z_{M'} - z_0 = -e^{i\theta} \frac{z - (-e^{-i\theta})}{z - e^{i\theta}}$   
 $\Rightarrow \arg(z_{M'} - z_0) \equiv \arg\left[e^{i\theta} \frac{z - (-e^{-i\theta})}{e^{i\theta} - z}\right] [2\pi]$

$\Rightarrow$  Pour tout  $M \neq A$  et  $M \neq B$ ,  $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv \theta + \pi + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) [2\pi]$

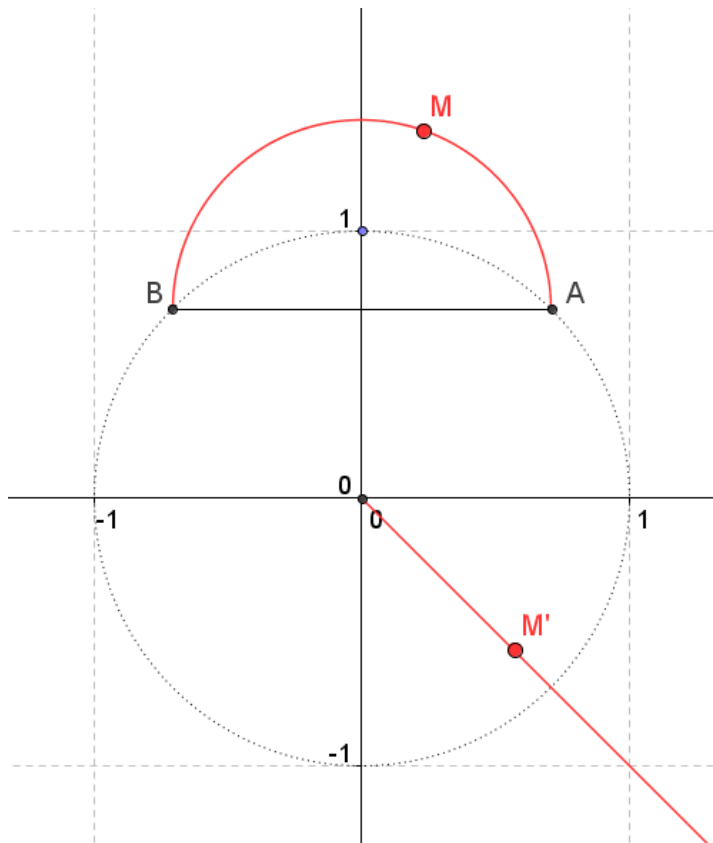
$\Rightarrow$  Pour tout  $M \neq A$  et  $M \neq B$ ,  $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv \theta + \pi + (\widehat{MA}, \widehat{MB}) [2\pi]$ .

b) Si  $\theta = \frac{\pi}{4}$  :  $z_A = e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{4}}$  et  $z_B = -e^{-i\theta} = -e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Si  $M'$  décrit la demi-droite d'équation :  $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

alors  $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$  et d'après la question précédente,

$(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \pi [2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{2} [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et par suite  $M$  appartient au demi cercle de diamètre  $[AB]$  privés des points  $A$  et  $B$ .



**Fin**