

<u>Lycée Houmet Souk 1 Jerba</u> <u>Prof: Loukil Mohamed</u>	<u>Devoir de Synthèse N : 2</u> <u>Durée : 2 Heures</u>	<u>3 Technique 06</u> <u>09 Mars 2012</u>
---	--	--

EXERCICE N : 1 (9 points)

A) Soit la fonction f définie sur $] - 2 ; + \infty [$ par : $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

1) Etudier les variations de f .

2) Tracer dans un repère orthonormé (**Unité : 4 cm**) la courbe de f et la droite $\Delta : y = x$

B) Soit la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = -\frac{3}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1) **a)** Représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0, U_1, U_2 et U_3 .

b) Quelle conjecture peut-on formuler quant au sens de variation de (U_n) et sa limite ?

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $- 1 \leq U_n < 0$.

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante sur \mathbb{N} .

C) Soit la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{1+U_n}{U_n}$.

1) **a)** Montrer que (V) est une suite géométrique de raison 2 .

b) Calculer V_n puis U_n en fonction .

c) Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$ puis $S'_n = \sum_{n=0}^8 \frac{1}{U_k}$ en fonction de n .

EXERCICE N : 2 (4 points)

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A , inscrit dans un cercle de centre O et de **rayon 1** .

On pose H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. On désigne par x la mesure en radian de l'angle \widehat{HOC} .

On suppose que $x \in] 0, \frac{\pi}{2} [$. On pose $f(x)$: l'aire du triangle ABC .

1) **a)** Exprimer BC et AH en fonction de x

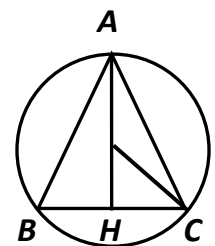
b) Montrer que pour tout $x \in] 0, \frac{\pi}{2} [$; $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$.

2) **a)** Montrer que pour tout $x \in] 0, \frac{\pi}{2} [$; $f'(x) = (\cos x + 1)(2 \cos x - 1)$.

b) Etudier le sens de variation de f .

c) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale .

3) On prend $x = \frac{\pi}{3}$. Montrer que ABC est un triangle équilatéral .



EXERCICE N : 3 (7 points)

A) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points

A, B et C les points d'affixes respectives : $Z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $Z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $Z_C = -\sqrt{3} + i$.

1) Déterminer la nature des ensembles suivants :

$$\Delta = \{ M \in P \text{ d'affixes } Z \text{ telles que : } |Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = |Z| \};$$

$$\Gamma = \{ M \in P \text{ d'affixes } Z \text{ telles que : } |i\bar{Z} - 1 + i\sqrt{3}| = 2 \}$$

2) a) Ecrire Z_A , Z_B et Z_C sous forme trigonométrique .

b) Dédire que les points A, B et C appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 2 .

c) Placer les points A, B et C dans le repère R .

3) Déterminer l'affixe Z_D du point D pour lequel $ABCD$ soit un parallélogramme .

B) On donne le nombre complexe $U = Z_B \cdot Z_C$.

1) Ecrire U sous la forme cartésienne .

2) Ecrire U sous la forme trigonométrique .

3) a) Donner alors les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{7\pi}{12}$

b) Dédire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.