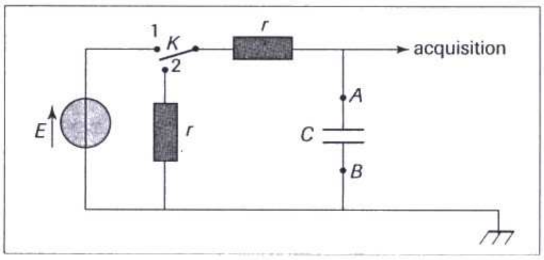
Etudes de circuits électriques : le circuit RC

6 Algébrisation du courant

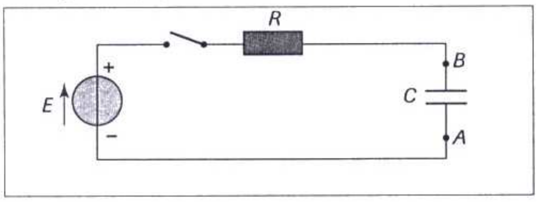
Soit le montage :



1. L'interrupteur est d'abord en position 1.
a. Indiquer sur le schéma le sens de circulation du courant. Ce sens sera considéré comme le sens positif.
b. Identifier l'armature positive du condensateur.
c. En respectant la convention récepteur, représenter par une flèche la tension u_C aux bornes du condensateur.
d. Cette position de l'interrupteur correspond-t-elle à la charge ou à la décharge du condensateur ?
2. L'interrupteur est basculé en position 2.
a. Identifier l'armature positive du condensateur.
b. Indiquer sur le schéma le sens de circulation du courant.
c. Préciser le signe de l'intensité du courant.

9 Charge d'un condensateur. Résolution analytique

Un condensateur initialement déchargé est inséré dans le montage de la page suivante.

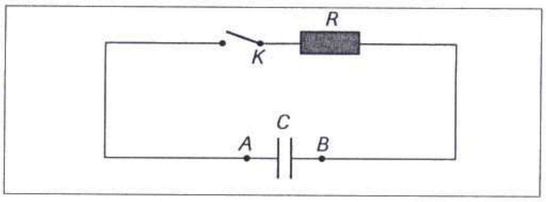


À la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.
1. Représenter par une flèche le sens de circulation du courant d'intensité i dans le circuit. Identifier l'armature positive du condensateur. Représenter par des flèches les tensions u_C aux bornes du condensateur et u_R aux bornes du conducteur ohmique, en respectant la convention récepteur.
2. En appliquant la loi d'additivité des tensions, établir une relation (1) entre E, u_R et u_C.
3. Exprimer u_R en fonction de i et l'intensité i en fonction de la charge q du condensateur.
4. En déduire l'expression de i en fonction de la capacité C et de la tension u_C.
5. À l'aide de la relation (1), établir l'équation différentielle à laquelle obéit u_C.
6. Une solution de cette équation différentielle est de la forme : $u_C = c + a \times e^{bt}$.
a. En reportant cette expression dans la relation (1), déterminer la valeur des constantes b et c.
b. À $t = 0$, que vaut la tension u_C ? En déduire la valeur du coefficient a.
c. En déduire l'expression de u_C en fonction du temps.

Données
- $R = 10$ kΩ ; $C = 2200$ µF ; $E = 6{,}0$ V.

12 Décharge d'un condensateur. Résolution analytique

Un condensateur initialement chargé est inséré dans le montage suivant :

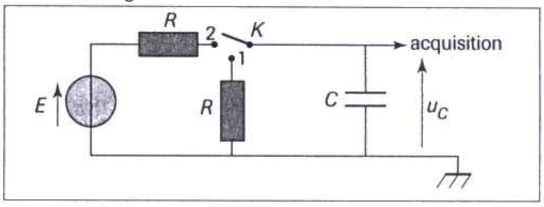


À la date $t = 0$, la charge du condensateur a pour valeur : $q_A = 0{,}6 \times 10^{-6}$ C et on ferme l'interrupteur K.
a. Représenter par une flèche le sens de circulation du courant d'intensité i dans le circuit.
Représenter par des flèches les tensions u_C aux bornes du condensateur et u_R aux bornes du conducteur ohmique, en respectant la convention récepteur.
b. Établir une relation (1) entre u_R et u_C.
c. À l'aide de la relation (1), établir l'équation différentielle à laquelle obéit u_C.
d. Une solution de cette équation différentielle est de la forme : $u_C = a \times e^{bt}$. Déterminer les constantes a et b. En déduire l'expression de u_C en fonction du temps.

Données
- $R = 15$ kΩ et $C = 0{,}1$ µF.

13 Temps de charge. Étude graphique. Influence des paramètres

Soit le montage :

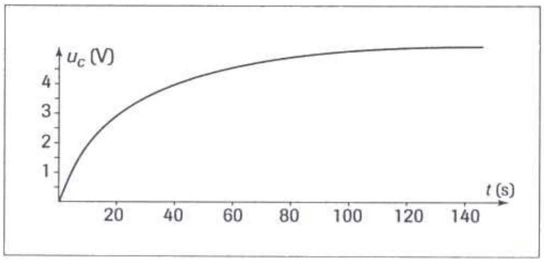


L'interrupteur est d'abord en position 1, assez longtemps pour que le courant s'annule, puis il est basculé en position 2 à la date $t = 0$. Un système d'acquisition informatique et un tableur permettent de tracer le graphe $u_C(t)$.

(courbe $u_C(t)$ au verso)

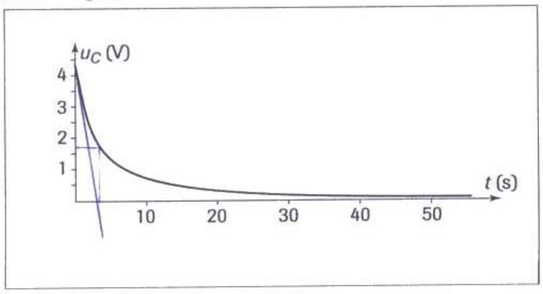
a. Déterminer graphiquement la constante de temps du dipôle RC.
b. En déduire une valeur approchée de la capacité C du condensateur.
c. Dans le cas où la résistance du conducteur ohmique serait $R' = 2R$, représenter sur le même graphique l'allure des variations de u_C en fonction du temps. On tracera soigneusement la tangente à la courbe à $t = 0$.
d. Dans le cas où la résistance du conducteur ohmique serait R et la capacité du condensateur $C' = \frac{C}{2}$, représenter sur le même graphique l'allure des variations de u_C en fonction du temps.

Données
- $R = 10$ kΩ et $E = 5{,}0$ V.



14 Temps de décharge. Étude graphique. Influence des paramètres

Un condensateur de capacité $C = 2\,200$ µF initialement chargé sous une tension $E = 4{,}5$ V est branché aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R. Un système d'acquisition informatique et un tableur permettent de tracer le graphe $u_C(t)$.

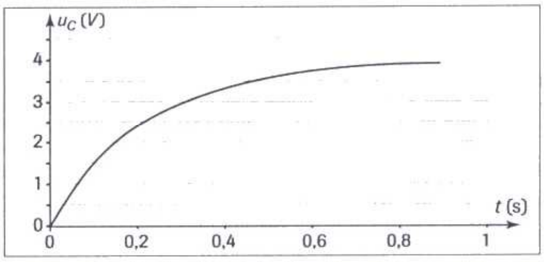


a. Déterminer graphiquement la constante de temps du dipôle RC.
b. En déduire une valeur approchée de la résistance R.
c. Tracer l'allure qu'aurait la courbe si on avait initialement chargé le condensateur sous une tension $E' = 9{,}0$ V.

16 Identification graphiques

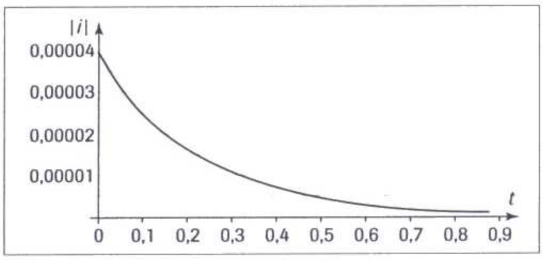
À l'aide d'un logiciel adapté, un élève simule la charge et la décharge d'un condensateur de capacité C. Il trace dans chaque cas la courbe représentant les variations de u_C, tension aux bornes du condensateur, en fonction du temps t ainsi que les courbes représentant les variations de l'intensité i du courant en fonction du temps. Cet élève n'a pas noté sur ses graphiques s'ils concernaient la charge ou la décharge du condensateur.

a. Un de ses graphiques représentant l'allure des variations de u_C en fonction de t est le suivant :



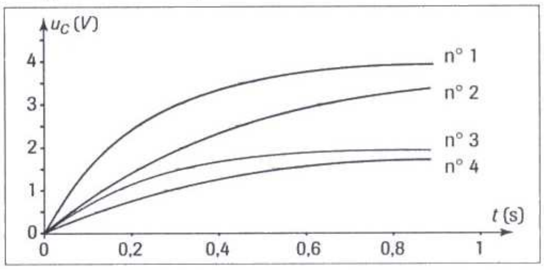
Pouvez-vous l'aider à savoir si cette courbe concerne la charge ou la décharge du condensateur ?
Justifiez votre réponse.

b. Un de ses graphiques représentant l'allure des variations de $|i|$ en fonction de t a l'allure suivante :



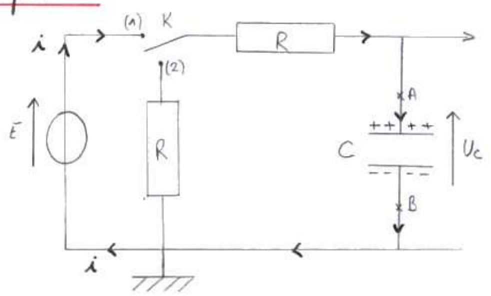
Pouvez-vous l'aider à savoir si cette courbe concerne la charge ou la décharge du condensateur ? Justifiez votre réponse.

c. Il renouvelle le tracé de courbes u_C(t) pour différentes valeurs de R, résistance du conducteur ohmique du circuit, de C et de E, tension sous laquelle le conducteur est chargé. Il obtient les quatre courbes suivantes :



Associer les choix de valeurs **a.**, **b.**, **c.** ou **d.** (tableau de la page suivante) aux courbes n° 1, n° 2, n° 3 ou n° 4.

Ex. 6 p 150

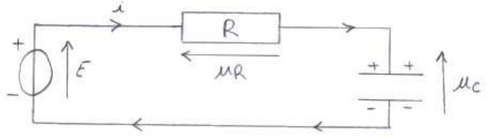


1. La position (1) correspond à la charge du condensateur.

2. L'armature positive du condensateur est toujours la même. Le courant circule dans l'autre sens et sera compté négatif ($i < 0$).

Ex. 9 p 150

1. Le courant circule du pôle + vers le pôle − du générateur



2. D'après la loi d'additivité des tensions

$$E = u_C + u_R$$

3. $u_R = R\,i$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$

4. $q = C\,u_C$ donc $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ d'où $u_R = RC\dfrac{du_C}{dt}$

5. $E = u_C + u_R$ donc, en remplaçant : $u_C + RC\dfrac{du_C}{dt} = E$

$$\Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

6. La solution est de la forme : $u_C = c + a\,e^{bt}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{du_C}{dt} = ab\,e^{bt}$

$$\Leftrightarrow ab\,e^{bt} + \frac{1}{RC}\left(c + a\,e^{bt}\right) = \frac{E}{RC} \qquad \Leftrightarrow ab\,e^{bt} + \frac{c}{RC} + \frac{a\,e^{bt}}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$\Leftrightarrow a\,e^{bt}\left(b + \frac{1}{RC}\right) + \frac{c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Cette équation doit être toujours vérifiée, pour toute valeur de t.

$$\begin{cases} b + \dfrac{1}{RC} = 0 \\ \dfrac{c}{\cancel{RC}} = \dfrac{E}{\cancel{RC}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{b = \dfrac{-1}{RC}} \\ \underline{c = E} \end{cases}$$

donc la solution est de la forme

$$u_C = E + a\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

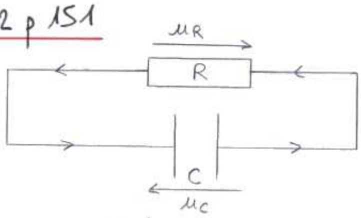
Il reste à déterminer la constante a :

$u_C(t=0) = 0$ donc $E + a\,e^{0} = 0 \Leftrightarrow E + a = 0 \Leftrightarrow \underline{a = -E}$

d'où $\underline{u_C = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$

Application numérique : $u_C(t) = 6\left(1 - e^{-t/22}\right)$

Ex. 12 p 151



$u_R = -u_C$ or $u_R = Ri = RC\dfrac{d}{dt}$

$\Leftrightarrow \quad u_C + RC\dfrac{du_C}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = 0$

$u_C = a e^{bt}$ donc $\dfrac{du_C}{dt} = ab e^{bt}$

En remplaçant :

$$abe^{bt} + \frac{1}{RC}ae^{bt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ae^{bt}\left(b + \frac{1}{RC}\right) = 0 \text{ pour tout } t$$

donc $b + \dfrac{1}{RC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \dfrac{-1}{RC}$

A $t = 0$, le condensateur admet une tension U_0 entre ses bornes telle que :

$CU_0 = q_A = 0,6.10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad U_0 = \dfrac{q_A}{C} = 6V$

$u_C(t=0) = U_0 = a\,e^{0\times t} = a$ donc $\underline{u_C(t) = U_0\,e^{-t/RC}}$ avec $\begin{cases} U_0 = 6V \\ R = 15\,k\Omega \\ C = 0,1\,\mu F \end{cases}$

Ex. 13 p 151

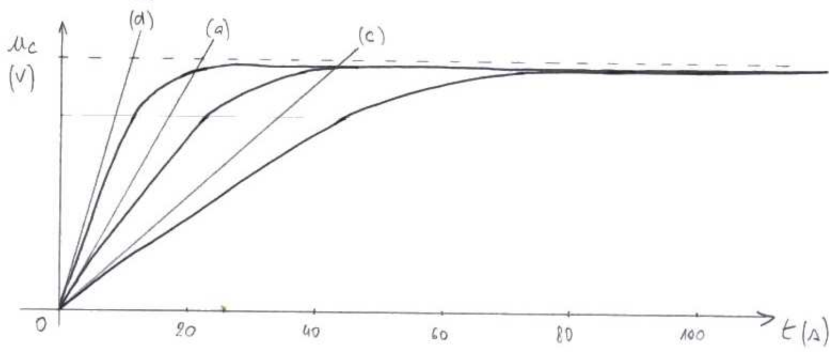
a/ La constante de temps est la durée nécessaire pour charger le condensateur à 63% de sa charge finale $\Rightarrow 63 \times \dfrac{E}{100} = \underline{3,15\text{ V}}$

Graphiquement, on lit qu'il faut environ 22 s pour arriver à $u_C = 3,15V$.

b/ $\tau = RC = 22\text{ s} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C} = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{22}{10.10^3} = \underline{2,2\text{ mF}}$

c/ Si $R' = 2R$ alors $\tau' = 2\tau$: il faudra deux fois plus longtemps pour atteindre les 63% de charge.

d/ Si $C' = \dfrac{C}{2}$ alors $\tau' = \dfrac{\tau}{2}$: le condensateur se chargerait alors deux fois plus vite.



Ex. 14 p 151

a/ Graphiquement, on trace la demi tangente à l'origine à la courbe et on observe qu'elle coupe l'axe des abscisses en $t = \tau = 3,6\ s$.
Autre méthode, on cherche à quelle abscisse $t = \tau$ la tension aux bornes du condensateur vaut 37 % de sa charge initiale (ce qui correspond à 63% de la décharge) : 37% de E => $\frac{37 \times 4,5}{100} = 1,7\ V \Rightarrow \tau = 3,6\ s$.

b/ Par définition : $\tau = RC$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\tau}{C} = \frac{3,6}{2200 \cdot 10^{-6}} = 1640\ \Omega$$

c/ Si $E' = 9V$ la courbe a exactement la même allure mais elle part d'une valeur maximale de 9V au lieu de partir de 4,5V. La tangente à l'origine coupera l'axe des abscisses au même point d'abscisse $t = 3,6s$.

Ex. 16 p 151

a/ La courbe représente la charge du condensateur puisque u_C augmente or $q = C u_C$ donc si u_C augmente alors q augmente aussi.

b/ L'intensité a une forte valeur puis s'annule peu à peu. Cela peut représenter le courant de charge ou de décharge, seul le sens du courant pourrait permettre de les différencier. Le graphe représente $|i(t)|$ donc on n'a pas d'information sur le signe de i, donc on ne peut pas conclure.

c/ Tableau

Cas	a	b	c	d
R (kΩ)	100	200	100	100
C (µF)	2,2	2,2	2,2	4,7
E (V)	4	2	2	4
Courbe	courbe 1	courbe 4	courbe 3	courbe 2

les courbes 1 et 2 mènent à $u_C = 4V$ donc correspondent aux cas a et d. La courbe 1 a une constante RC plus petite donc correspond au cas a.
les courbes 3 et 4 sont les cas b et c et mènent à $u_C = 2V$. La courbe 3 a une constante RC plus petite => cas c.