

Résumé : Etude de fonctions
Niveau : *Bac Sciences Expérimentales*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et on note C_f la courbe représentative de la fonction f dans ce repère. a et b sont deux réels.

Définition : "Asymptotes verticales ou parallèles à l'axe (O, \vec{j}) "

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, alors la droite $\Delta: x = a$ est une asymptote verticale (ou parallèle à l'axe (O, \vec{j})) à C_f .

Définition : "Asymptotes horizontales ou parallèles à l'axe (O, \vec{i}) :"

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, alors la droite $\Delta: y = b$ est une asymptote horizontale (ou parallèle à l'axe (O, \vec{i})) à C_f au voisinage de $-\infty$.
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, alors la droite $\Delta: y = b$ est une asymptote horizontale (ou parallèle à l'axe (O, \vec{i})) à C_f au voisinage de $+\infty$.

Définition : "Branches paraboliques"

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction celle de (O, \vec{j}) .
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction celle de (O, \vec{i}) .
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction celle de (O, \vec{j}) .
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction celle de (O, \vec{i}) .

Définition : "Asymptotes obliques"

- ✓ La droite $\Delta: y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ ssi $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
- ✓ La droite $\Delta: y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$ ssi $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Remarques :

- ✓ Les valeurs de a et de b se calculent à l'aide des formules suivantes :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$$

- ✓ Pour étudier la position relative de l'asymptote oblique $\Delta: y = ax + b$ et la courbe C_f , on étudie le signe de l'expression $f(x) - (ax + b)$.

Définition : "Direction asymptotique"

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors la droite $\Delta: y = ax$ est une direction asymptotique à C_f au voisinage de $+\infty$.
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors la droite $\Delta: y = ax$ est une direction asymptotique à C_f au voisinage de $-\infty$.

Définition : "Fonctions périodiques"

La fonction f est périodique de période T ($T \in]0, +\infty[$) si pour tout réel x on a :

$$f(x + T) = f(x)$$

Définition : "Centres de symétrie"

Le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f ssi pour tout $x \in D_f$ on a :

$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = 2b - f(x)$$

Définition : "Axes de symétrie"

Le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est orthogonal.

La droite $\Delta: x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f ssi pour tout $x \in D_f$ on a :

$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$

Définition : "Fonctions paires, fonctions impaires "

1. f est **paire** ssi pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
2. f est **impaire** ssi pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Remarques :

- ✓ Si f est paire, alors l'axe (O, \vec{j}) est un axe de symétrie de sa courbe C_f .
- ✓ Si f est impaire, alors le point O est un centre de symétrie de sa courbe C_f .