Lycée TheLepTe

2011-2012

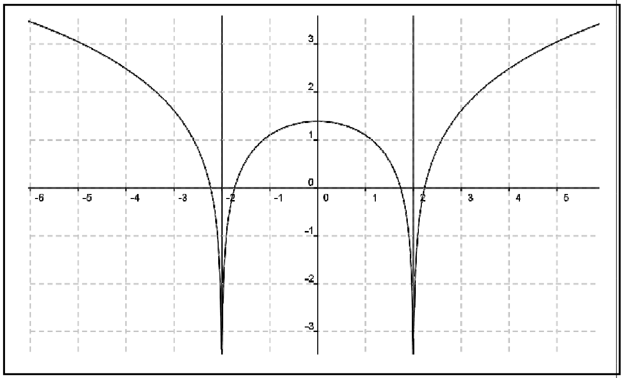
Serie d'exerciceS n°2

Niveau : 4 ème Science expérimentales

THEMES: MathématiqUES(fonctions logarithmes-foncyions exponentielles-integrales-suites réelles

Prof : Mhamdi Abderrazek

EX1 :



la courbe C_f ci contre représente une fonction dérivable sur son ensemble de définition D_f dont les droites d'équations :x=-2 et x=2 sont deux asymptotes à C_f

1). par lecture graphique répondre aux questions suivantes :

a). Déterminer D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f

b). Résoudre l'équation f '(x)=0 et préciser le nombre de solutions de l'équation f(x)=0

c). Dresser le tableau de variation de f

d). Discuter suivant le paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation f(x)=m.

2). Sachant que $f(x)=\ln|ax^2+b|$ et les solutions de l'équation f(x)=0 sont: $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ montrer que a=1et b=-4

3). Retrouver le tableau de variation de f

4). Soit g la restriction de f à l'intervalle $]2;+\infty[$

a). Montrer que g admet une fonction réciproque h dont on précisera son ensemble de définition D_h.

b). Tracer C_h ,la courbe de h ,dans le même repère.

c). Etudier la dérivabilité de h sur D_h et dresser le tableau de variation de h.

d). Expliciter h(x) $\forall x \in D_h$ et retrouver le tableau de variation de h.

EX2 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2x+\frac{e^x}{e^x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

1).a). Montrer que $\Omega(0\,;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de C_f

b).Vérifier que $\Omega\in C_f$.Conclure.

c). Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point Ω.

2). Etudier f et tracer C_f .

3).Déterminer le nombre de solutions de l'équation :$f(x)=m$ où $m\in$ IR

4).a). Soit $\alpha>2$.Calculer $\mathbf{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :$x=\ln(2)$;$x=\ln(\alpha)$ et la droite **D** :$y=2x+1$ et la courbe C_f

b). Calculer alors la limite de $\mathbf{A}_\alpha$ quand x tend vers $+\infty$

EX3 :

Soit (I_n) la suite définie sur IN^* par $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+1}\,dx$

1). Calculer I_1

2). Montrer que (I_n) est décroissante

3).a). Montrer que $\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\forall\, n\in IN^*$

b). En déduire que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

4).a). Montrer que $\forall\, x\in[0\,;1]$ on a : $0\leq\sqrt{2}-\sqrt{x+1}\leq\frac{1-x}{2}$

b). Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{n+1}-\frac{1}{n^2}\leq I_n\leq\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\forall\, n\in IN^*$

c). En déduire que (nI_n) est convergente et calculer sa limite .

EX4 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x\ln(1-x)+\frac{1}{4}$ si $x<0$ et $f(x)=\frac{e^x}{x^2+4}$ si $x\geq 0$

1).a). Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b). Etablir le tableau de variation de f sur IR

c). tracer C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

2).a). Montrer que $\frac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\leq\frac{1}{4}$ $\forall x\in[0\,;1]$

b). En déduire que 0≤f '(x) $\leq \frac{3}{4}$ $\forall x$ ∈[0 ;1]

3). Soit g la fonction définie sur [0 ;1] par g(x)=f(x)-x

a). Dresser le tableau de variation de g sur [0 ;1]

b).i). Montrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans [0 ;1]

ii). Comparer x et f(x) $\forall x$ ∈[0 ;1]

4). Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : u_0=1 et u_{n+1}=f(u_n) ∀ n∈ IN

a). Montrer que $\alpha \leq u_n \leq 1$ ∀ n∈ IN

b). Montrer que (u_n) est décroissante

c). En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

5).a). Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$ ∀ n∈ IN

b). Montrer que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{3}{4})^n$ ∀ n∈ IN

c). Retrouver la limite de (u_n).

EX5 :

Soit f la fonction définie sur [0 ;π] par f(x)= sin²(x) et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé (o ;$\vec{i}$;$\vec{j}$)

1). Etudier f et tracer C_f .

2). Linéariser sin²(x) et sin⁴ (x).

3). .Calculer A_α l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :x=0;x=π:y=0et la courbe C_f

4). Calculer le volume du solide obtenu par la rotation de la courbe C_f autour de l'axe des abscisses.

EX6 :

Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞ [par f(x)=$\frac{x^2-1}{4}$- 2 ln(x)

1).a). Dresser le tableau de variation de f

b). Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans]0 ;+∞ [exactement deux racines dont l'une α∈[3 ;4]

c).vérifier que $\alpha=\sqrt{1 + 8\ln(\alpha)}$

2). Soit g la fonction définie sur [3 ;+∞ [par $g(x)=\sqrt{1+8\ln(x)}$

Montrer que $g(x)\geq 3$ et que $0\leq g'(x)\leq \frac{4}{9}$ ∀ x∈[3 ;+∞ [

3). Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=g(u_n)$ ∀ n∈ IN

a). Montrer que $u_n \geq 3$ ∀ n∈ IN

b). Montrer que $|u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{4}{9}|u_n-\alpha|$ ∀ n∈ IN

c). Montrer que $|u_n-\alpha|\leq (\frac{4}{9})^n$ ∀ n∈ IN

d). En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

e). Trouver n_0 pour que $|u_{n_0}-\alpha| < 10^{-2}$.

EX7 :

Soit n un entier naturel On considère la fonction f_n définie sur [0 ;1] par :
$f_0(x)=\ln(x)$ et $f_n(x)=x^n\ln(x)$ si $n>0$ et on pose $I_n=\int_1^e f_n(x)dx$ ∀ n∈ IN

1). Calculer I_0; I_1 et I_2

2). Etudier la monotonie de (I_n)

3).a). Exprimer I_n en fonction de n.

b). En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers +∞ .

c). la suite (I_n) est elle majorée ? Justifier.

BON TRAVAIL