SERIE DE MATHEMATIQUES N°3
CLASSE :QUATRIEME SECONDAIRE
SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES + MATHEMATIQUES
THEME : FONCTIONS RECIPROQUES

LYCEE D'INDEPENDANCE
OUED ELLIL
ANNEE SCOLAIRE :2011-2012
PROF : BELLASSOUED MOHAMED

EXERCICE 1

Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de leur ensemble de définition sur un ensemble a préciser , et écrire les fonctions réciproques :

$f_1(x)=3x-5$; $f_2(x)=\sqrt{3}-x$; $f_3(x)=x^2-1$ sur $\left]-\infty,0\right]$; $f_4(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ sur $[-1,1]$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivantes , montrer que $f:I\to\mathbb{R}$ admet une fonction réciproque f^{-1} , et calculer sa dérivée au point indiqué entre parenthèse :

1. a- $I=\mathbb{R}$ $f(x)=x^3+2x-1$ $(y=2)$

   b- $I=\mathbb{R}$ $f(x)=x^5+3x^3+2x-1$ $(y=5)$

justifier que les équations $x^3+2x-1=0$ et $x^5+3x^3+2x-1=0$ admettent une unique solution réelle

2- a- $I=\mathbb{R}^*_+$ $f(x)=-2x+\dfrac{8}{x^3}$ $(y=-3)$

   b- $I=[-1,1]$ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ $(y=1)$

EXERCICE 3

Montrer que la fonction $f:x\to\dfrac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-1,1\right[$ et donner l'expression de f^{-1}

EXERCICE 4

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x}, x\in\left]-\pi,\pi\right[\setminus\{0\}\\ 1, \text{si } x=0\end{cases}$

1- montrer que pour tout $x\in\left]0,\pi\right[$: $\sin x-x\cos x\geqslant 0$

2- étudier les variations de f . déduire que f réalise une bijection de $\left[0,\pi\right[$ vers $\left[1,+\infty\right[$

3- on note par g la fonction réciproque de f sur $\left[0,\pi\right[$, vérifier que pour tout $x\in\left[1,+\infty\right[$ on a $x\sin(g(x))=g(x)$

4- calculer $g(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

5- calculer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$

EXERCICE 5

Soit f une fonction définie sur $[-1,1]$ par : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{si } x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$

1- montrer que f est continue et dérivable en 0

2- montrer que pour tout réel x de de $\left]-1,1\right[$; $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$

3- montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}

4- a- soit λ un réel de $\left]-1,1\right[$. montrer que l'équation $f(x)=\lambda$ admet une solution unique x_0 de $\left]-1,1\right[$

   b- vérifier que $f\left(\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)=\lambda$

   c- en déduire l'expression de f^{-1} pour tout x de I

5- tracer dans un même repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$

Exercice 6 (unité graphique 4cm)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- a- étudier la dérivabilité de f a droite de 0 . interpréter graphiquement le résultat .

b- dresser le tableau de variations de f

2- a- montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera on désigne par $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative

b- expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

3- tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}x)}$

1- étudier la dérivabilité de f en 0

2- dresser le tableau de variations de f

3- a- montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera on désigne par $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative

b-étudier la continuité et le sens de variations de g

4-a- montrer que g est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x\in[0,1[$ $g'(x)=\frac{4}{\pi}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

b-montrer que que pour tout $x\in[0,1[$ $g''(x)=\frac{4}{\pi}\frac{1+x^4}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}}$

Exercice 8

1°/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

b- Montrer que pour tout $x\geq 0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq\frac{x}{\sqrt{x+1}}\leq x$.

c- Montrer que la fonction u définie sur $[0,1]$ par $u(x)=x-\frac{x^2}{2}$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et expliciter $u^{-1}(x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2°/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Interpréter graphiquement la double inégalité démontrée en 1°/b).

b- Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On note g^{-1} la fonction réciproque de g

c- Tracer dans le même repère les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_{g^{-1}}$, $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_{u^{-1}}$.

3°/ Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_{n+1}=g^{-1}(U_n)$, $n\geq 0$.

a- Montrer que (U_n) est croissante.

b- Montrer que (U_n) est non majorée.

c- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

4°/ a- En utilisant la question 2°/c), justifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $x\leq g^{-1}(x)\leq 1-\sqrt{1-2x}$.

b- En déduire la limite de la suite (V_n) définie par $V_n=ng^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{2\cos x}$

1- montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on déterminera

2- on considère la fonction g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\sin x-2\cos^2 x$

a-étudier les variations de g

b-montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. vérifier que $\frac{\pi}{4}\prec\alpha\prec\frac{\pi}{3}$

c-en déduire le signe de **g(x)** sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

3-Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=f(x)-x$

a-étudier les variations de h

b-prouver que $h(\alpha)\prec 0$

c-en déduire que l 'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions r et r' tels-que

$$\frac{\pi}{6}\prec r\prec\frac{\pi}{4}\quad\text{et}\quad\frac{\pi}{3}\prec r'\prec\frac{5\pi}{12}$$

d-interpréter graphiquement les résultats

e-tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

EXERCICE 10

On considère la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

1- justifier la dérivabilité de g sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et montrer que $g'(x)=\frac{1}{1-\sin x}$

2- déduire que g est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

3- montrer que g^{-1} est dérivable sur J , et que $(g^{-1})'(x)=\frac{2}{x^2+1}$

4- pour $x\in J$, on pose $\varphi(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})$

a- montrer que φ est dérivable sur J et calculer $\varphi'(x)$

b- en déduire que pour $x\in J$, $g^{-1}(\frac{1}{x})=-g^{-1}(x)$

EXERCICE 11

Soit n un entier naturel non nul et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^3+3x+1$

1- **a**- dresser le tableau de variations de f_n

b-montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. on pose h sa réciproque

c- étudier la continuité et le sens de variations de h

d- montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique $\alpha_n\in\left]-1,0\right[$

2- **a**- montrer que pour tout réel x de $\left]-1,0\right[$ et pour n de $\mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(x)\prec f_n(x)$

b- montrer que la suite (α_n) est croissante et qu'elle est convergente

c- montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\alpha_n=\frac{-1}{\alpha_n{}^2+3n}$

d- en déduire que $\frac{-1}{3n}\prec\alpha_n\prec\frac{-1}{3n+1}$. calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

3- tracer $\mathscr{C}_{f_1}$ et $\mathscr{C}_{f_1^{-1}}$; $\mathscr{C}_{f_2}$ et $\mathscr{C}_{f_2^{-1}}$

EXERCICE 12

1- Verifier que chacune des fonctions suivantes est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J a déterminer

2- Tracer dans le même repère la fonction réciproque de chaque fonction en précisant le domaine de dérivabilité de chaque fonction réciproque