Lycée Bourguiba Monastir **Decembre 2010**

Mathématiques

DEVOIR DE SYNTHESE N^{0}1

Durée 2h

Mr : Orfi Raouf **4èmeT$_{1+2}$**

Exercice N°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

1) Une racine carre de Z= $\sqrt{3}-i$ est :	**a.** $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ **b.** $-1+i\sqrt{3}$ **c.** $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
2)Si z'et z''sont les solutions de l'équation : $iz^2+5z+3-i\sqrt{7}=0$ alors $z'+z''=$	**a.** 5i **b.** -5i **c.** 5
3) n entier naturel non nul, $\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{(x+1)^n-1}{x}=$	**a.** 0 **b.** n +1 **c.** n

Exercice N°2 (5 points)

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(1+3i)z+2i-2=0$.

b- Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2)Soit θ un réel de l'intervalle $[0,\pi]$ et l'équation :

$$E_\theta: z^2-(1+2i+i\cos\theta)z+2i-2\cos\theta=0\ ;(z\in\mathbb{C})$$

a-Vérifier que $z_0=2i$ est une solution de E_θ.

b-Trouver alors l'autre solution z_1 de E_θ en fonction de θ.

3)Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives $z_A = \frac{i}{2}$ et $z_M = 1 + i\cos\theta$.

a-Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $[0,\pi]$.

b-Déterminer le réel θ pour laquelle la distance AM est minimale

<u>Exercice N°3</u> (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = -1+\sqrt{x^2-1}$ On désigne par (**C**) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$)

1) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2) Calculer f '(x) puis Dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que **D** : y = x -1 est une asymptote à(**C**) au voisinage de $+\infty$

4)a. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle **J** que l'on précisera. On note f^{-1} la fonction réciproque de f

b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x élément de **J.**

5)Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$ et vérifier que 2< α<3

6) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = $f(\frac{1}{\cos x})$

a. Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et (g)' (x) $= \frac{1}{\cos^2 x}$

b. En déduire que $g(x) = -1+\tan x$; pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice N°4 (5 points)

Le plan est rapporte a un repère orthonormé (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$)La courbe (C_f)ci-dessous représente une fonction f définie sur IR et la droite **T** est la tangente à la courbe (C_f) au point A (1,2)

1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to0^-} f(\frac{1}{x})$

2)Ecrire une équation cartésienne de la tangente **T** à (C_f)au point d'abscisse 1

3)Dresser le tableau de variations de f sur IR

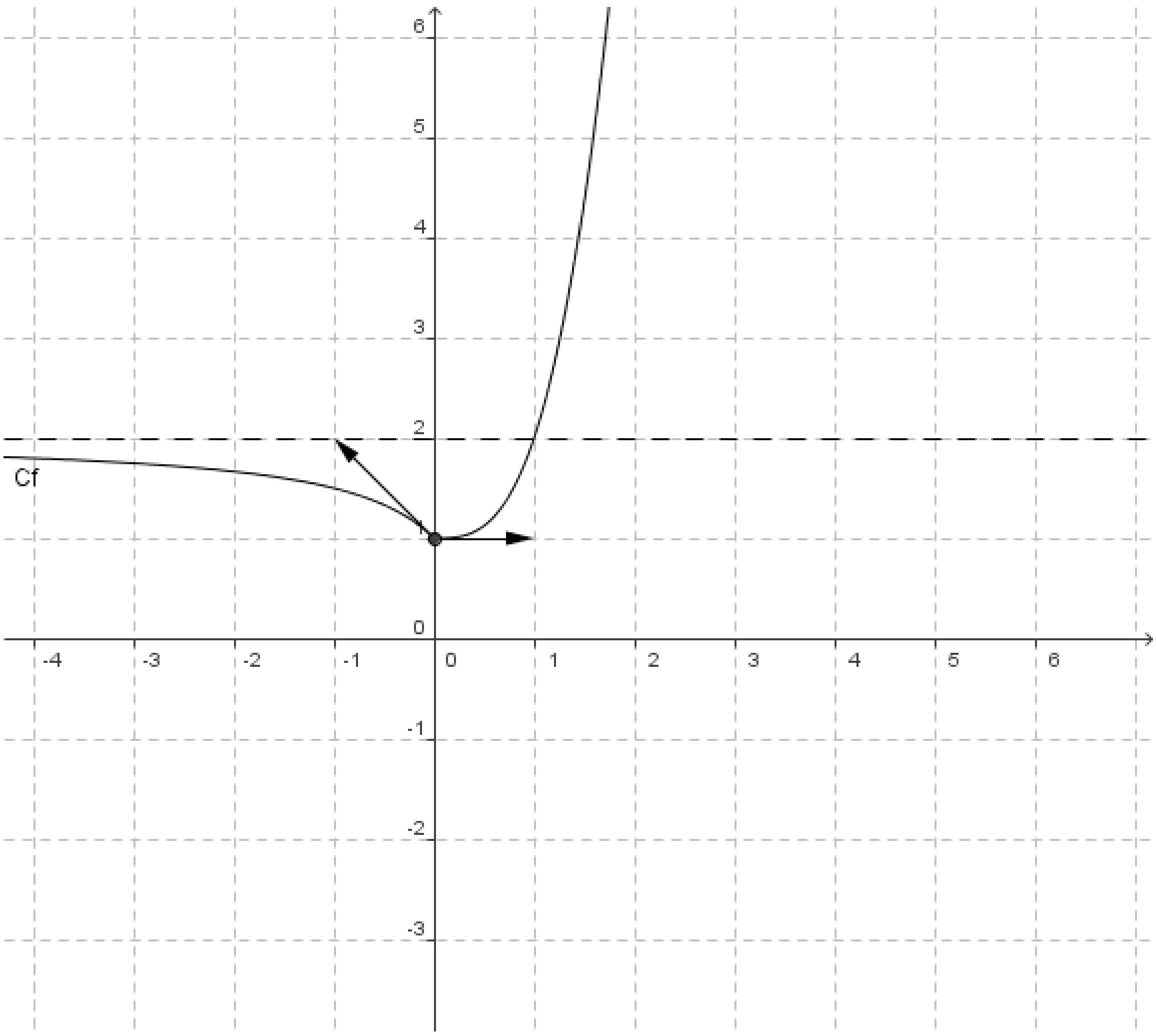
4) Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$

a. Montrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur sur un intervalle **J** que l'on précisera

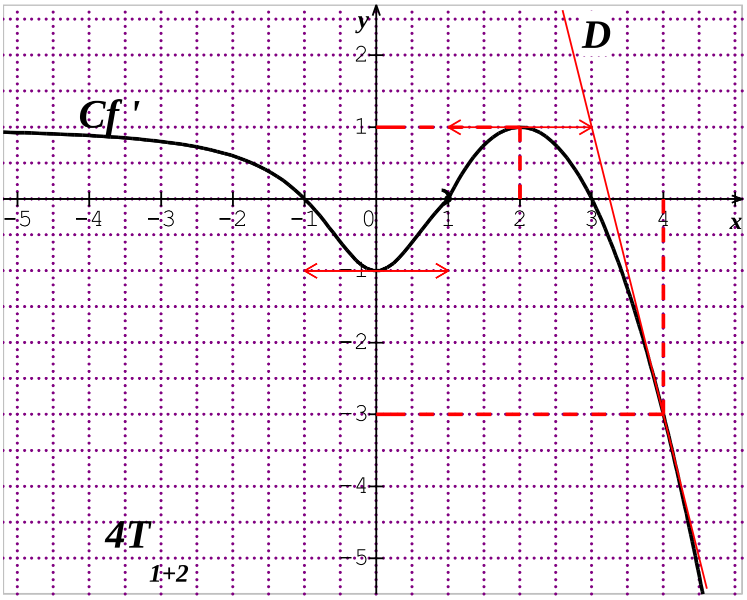
b.Construire la courbe (**ζ '**) de g^{-1} puis dresser le tableau de variations de g^{-1}

c. Calculer $(g^{-1})'(2)$

d. g^{-1}est elle dérivable a droite en 1 ? Justifier votre réponse



Exercice n°5(supplementaire)



Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR

Cf ' est la courbe représentative de la fonction dérivée f ' de f dans un repère orthonormé

1)VRAI OU FAUX :

a.f admet un minimum en 1

b.f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$

2)a..Donner le signe de f ' sur IR

b.Endeduire le sens de variation de f sur IR

3) a.Soit h la restriction de f sur $[1,3]$

Montrer que h est une bijection sur $[1,3]$

b. sur quel intervalle h^{-1} est derivable ?

4) a.preciser f ''(2).

le point d'abscisse 2 est elle point d'inflexion de la courbe C_f ?

b. Determiner f''(4)

Exercice N°2 DEVOIR

(6 points)

A/ Soit f la fonction définie sur **I**= $]0,3]$ par $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{9-x^2}}{x}$. On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3 Interpréter graphiquement le résultat obtenu

b. Montrer que f est dérivable sur $]0,3[$ et que $f'(x)=\dfrac{9}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

c. Dresser alors le tableau de variations de f sur **I**= $]0,3]$

2)a. Montrer que f est une bijection de **I** = $]0,3]$ sur un intervalle **J** que l'on précisera

b. Montrer que l'équation (E) : $f(x)=-x$ admet une solution unique α dans $]0,3]$ et que $\alpha \in]1,2 ; 1,3[$

3) a. Déterminer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$

b. vérifier que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$

B/ Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = $f(3\cos x)$

1) Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que (g)' (x) = $\dfrac{-1}{\cos^2 x}$

2) En déduire

a. qu'il existe un unique réel $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g(\beta) = -2010$

b. que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: $g(x) = 1 - \tan x$

EXERCICE N°7

On considère dans ¢ l'équation (E) **:** $Z^2 - 2Z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans ¢.

2) Soit $\theta \in]0, \pi[$ on donne $Z_1 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ et $Z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

Montrer que $Z_1 =$ Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.

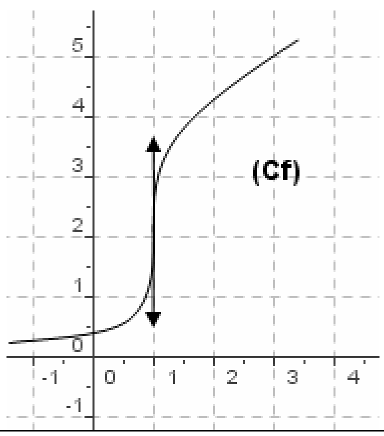
3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct les points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2

a) Montrer que $\frac{Z_2}{Z_1} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$

En déduire la nature du triangle OM_1M_2

b) Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M_1 lorsque θ décrit $]0, \pi[$,

<table>
<tr>
<td>4)

</td>
<td>a. f une bijection de $\left]-\infty, +\infty\right[$ sur $\left]-\infty, +\infty\right[$

b. f dérivable en 1

c. $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = +\infty$</td>
</tr>
</table>

S NOMBRES COMPLEXES $4^{\text{ème}}$ M

Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. On considère l'équation : (E_θ) : $Z^2 - (2i + e^{i\theta}) Z - 1 + i e^{i\theta} = 0$.

1) Résoudre dans C l'équation (E_θ).

2) On pose $Z_1 = i + e^{i\theta}$

a) Prouver que $Z_1 . e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} = 2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})$

b) En déduire la forme exponentielle de Z_1.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $e^{i\theta}$; Z_1 et i.

a) Prouver que OABC est un losange.

b) Montrer que OB.AC = $2\cos\theta$

c) En déduire θ pour que l'aire du losange OABC soit égale à 1/2.

4) Résoudre dans C l'équation $Z^4 - (2i + 1) Z^2 -1 + i = 0$.

EXERCICE N°2

Soit R = $(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct et $\theta \in]-\pi/2,\pi/2[$

1) Vérifier que $1 + \sin(2\theta) = (\cos\theta + \sin\theta)^2$

2) On considère dans ¢ l'équation $E_\theta : (1+i)Z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)Z + 1 - i = 0$

On note Z' et Z'' les solutions de l'équation E_θ

a) Sans calculer Z' et Z'', montrer que Z'.Z'' = -i

En déduire une relation entre Arg (Z') et Arg (Z'').

b) Résoudre dans ¢ l'équation E_θ et écrire Z' et Z'' sous forme exponentielle.

3) On considère les points A($\cos\theta + i\sin\theta$) et B($-\sin\theta - i\cos\theta$)

Déterminer θ pour que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \pi/3[2\pi]$

En déduire alors la nature du triangle OAB pour la valeur de θ trouvée.

EXERCICE N°3

Soit R = $(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct et $\theta \in]-\pi/2,\pi/2[$

On considère dans ¢ l'équation $(E): Z^2 - (2\cos\theta)Z + 2(1-\sin\theta) = 0$

1) Résoudre dans ¢ l'équation (E).

2) On note M_1, M_2 et M les points d'affixes resp $Z_1 = e^{i\theta} - 1$, $Z_2 = \overline{Z_1}$ et $Z = 2\cos\theta$

a) Ecrire Z_2 sous forme exponentielle. En déduire que $Z_2/Z_1 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

b) Montrer que le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange et préciser la valeur de θ pour laquelle ce quadrilatère est un carré.

c) Déterminer les ensembles (γ) et (γ_1) des points M et M_1 lorsque θ varie dans $]-\pi/2,\pi/2[$

EXERCICE N°7

) On considère dans ¢ l'équation $E_\theta : (1+i)Z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)Z + 1 - i = 0$

On note Z' et Z'' les solutions de l'équation E_θ

a) Sans calculer Z' et Z'', montrer que Arg (Z') +Arg (Z'')= -i

b)

(Ch) est la courbe représentative d'une fonction h définie sur IR.

1) Déterminer les limites éventuelles suivantes
$\lim_{x\to-\infty} h(x)$; $\lim_{x\to+\infty} h(x)$; $\lim_{x\to 2^+} h(x)$ et $h(2)$

2) Déterminer l'image par h de chacun des intervalles $]-\infty,0]$, $]-\infty,2]$, $]2,+\infty[$ et IR

3) Montrer que l'équation (E) : $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1, 0[$

4) Soit g(x)= $\dfrac{1}{2x^2+1}$

Déterminer : **a.** $hog(0)$ **b.** $\lim_{x\mapsto+\infty} goh(x)$

Exercice N°3

(5points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$,On considère les points A , B ,C et D d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$

1)a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D

b. Placer alors les points A,B,C et D dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$

2)a. Déterminer l'affixe du milieu du segment de $[AC]$, celui du segment $[BD]$

b.Determiner un argument de $\dfrac{z_B}{z_A}$

3)En déduire la nature du quadrilatère ABCD

Exercice N°4

(6points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$,On note A, B, les points d'affixes respectives $z_A = -1$, B d'affixe $z_B = 2i$

A tout point M d'affixe z différent de -1 , on associe le point M' d'affixe z' :

z'= = $\dfrac{z-2i}{z+1}$ pour z $\neq$ -1

1)a. On pose z=x+iy , z'=x'+iy' , ou x , y, x' et y' sont des réels
exprimer la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z' en fonction de x et y .

b. Déterminer alors l'ensemble **E** des points M d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire

2) Retrouver géométriquement l'ensemble **E** en utilisant les points A et B

3) a. pour z $\neq$ -1, calculer |z' -1|.|z+1|

b. En déduire que si M $\in \zeta_{(A,2)}$ alors M' parcourt un cercle que l'on précisera

PROBLEME

EXERCICE N°2

A) Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$

1) Dresser le tableau de variation de f .

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle]0,2]

a) Montrer que g réalise une bijection de]0,2] sur I = [-1/4, $+\infty$[.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ puis justifier que g^{-1} est continue sur I.

c) Montrer que pour tout x$\in$I, $g^{-1}(x)$ = $\dfrac{2}{1+\sqrt{1+4x}}$

d) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes de g et g^{-1}.

B) On définie sur IN la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0=3/2 \\ U_{n+1}=2+g(U_n) \end{cases}$

1) On pose ψ (x) = 2 + g(x) pour tout x$\in$[3/2, 2]

a) Montrer que l'équation ψ (x) = x admet dans]3/2,2[une solution unique α

b) Montrer que pour tout x$\in$[3/2, 2], ψ (x)$\in$[3/2, 2].

2) a) Montrer que pour tout n$\in$IN, $U_n\in$[3/2, 2].

b) Montrer que si la suite U converge alors sa limite est α .

EXERCICE N°3

1) Soit g la fonction définie sur IR par g(x) = $\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}$

1) Montrer que g réalise une bijection de IR sur]-1,0[

2) Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+1-\dfrac{x}{2}$

a) Etudier les variations de f

b) Montrer que f est bijection de IR sur un intervalle I que l'on précisera.

c) Montrer que pour tout x$\in$I ; $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4(x-1)}+1-x$

EXERCICE N°4

3) Tracer les courbes de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

4)

5) a) Etudier les variations sur $]0,\pi/2]$ de la fonction φ définie par φ (x) = g(x) – x.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha\in]0,\pi/2[$ tel que $g(\alpha)=\alpha$.

d) Montrer que $\alpha\in]\pi/6,\pi/3[$

5) Déterminer les coordonnes des points d'intersection de (ζ_f) et Δ : y = x.

6) Tracer (ζ_f), Δ et les asymptotes de (ζ_f) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$

7) a) Montrer que la restriction h de f à [1, + ∞[admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout x$\in$J et tracer sa courbe dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur I =]2,+∞[par f(x) = $\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe.
2) Montrer que f réalise une bijection de I sur I. $g(x) =$
3) Soit f $^{-1}$ la fonction réciproque de f. Expliciter pour tout x de I, f $^{-1}$ (x).

4) Soit g la fonction définie sur]0,1/2] par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{2}{\cos\pi}\right) & si \quad x \neq 1/2 \\ g(1/2) = 2 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout x de]0,1/2] , g(x) = 2/sin(πx)
b) Montrer que g réalise une bijection de]0,1/2] sur un intervalle J que l'on précisera
c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur]2,+∞[et déterminer sa dériver.

PROBLELE

A/ Soit la fonction f définie sur IR par : f(x) = $1+\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Etudier les variations de f.
b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 0.
2.a) Montrer que l'équation : f(x) = 3x admet dans [-1, + ∞[une unique solution α .
b) Justifier que $\alpha \in$]0,1[.
3) Tracer la courbe (C).

B/

Soit U la suite définie par : $U_0 \in$]0,1[et pour tout n$\in$IN, U_{n+1} = 1/3 f (U_n).
1) Montrer que pour tout n$\in$IN on a : 0< U_n < 1
2) Montrer que pour tout x $\in$[0,1] on a : $|f'(x)| \leq 2$

3.a) Montrer que pour tout n$\in$IN on a : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \ (2/3)\ |U_n-\alpha|$

b) En déduire que pour tout n$\in$IN on a : $|U_n-\alpha| \leq \ (2/3)^n\ |U_0-\alpha|$

c) Déterminer la limite de la suite U.

4) Soit la suite V définie sur IN* par : V_n = $\frac{1}{n}\sum_{K=0}^{n}|U_K-\alpha|$

Montrer que la suite V converge vers le réel 0.

C/

Soit la fonction g définie sur $[-\pi/4,\pi/2]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(tgx) & si \quad x \neq \pi/2 \\ \quad g(\pi/2) = 0 \end{cases}$

1) Vérifier que pour tout x$\in[-\pi/4,\pi/2]$on a : g(x) = $1+\sqrt{2}\cos(x+\pi/4)$
2) Etudier les variations de g et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.
3) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.
4) Etudier la dérivabilité de g $^{-1}$ sur l'intervalle I puis calculer (g^{-1})'(x).

5) Tracer, dans le repère contenant la courbe de g, celle de g^{-1}.