| | | |
|---|---|---|
| Lycée secondaire : ALI BOURGUIBA KALAA KBIRA | | Année scolaire : 2011 - 2012 |
| Prof : MAATALLAH | Devoir de contrôle n° 1 | Classes : 4 M |
| Epreuve : Mathématiques | Date : 19 - 11 - 2011 | Durée : 2 heure |

## Exercice n 1 (6 points )

1/On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$ , $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a) Etudier le sens de variation des suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

b) Etablir que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes .

c) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente .

2/ soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans [0 ; 1 ] telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_nT_n = 1$. Etudier le comportement des deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ .

## Exercice n 2 ( 6 points )

1/ Déterminer l'ensemble des points $N$ d'affixe $z$ tels que $\bar{z}z^2$ soit un réel .

2/ Soit $z$ un nombre complexe différent de 1 . Montrer que $i\frac{z+1}{1-z}$ est un réel si , et seulement si , $|z| = 1$

3/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A , et B les points d'affixes1 et -1. Soit $f$ l'application du plan P\{A} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z' ) tel que : $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$

a) Etablir que $|z'| = 1$ et que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel . Montrer que $\frac{z'+1}{z-1}$ est un imaginaire .

b) Interpréter géométriquement les trois propriétés établies dans la question précédente . Donner une construction géométrique de point M' connaissant le point M .

## Exercice n 3 ( 8 points )

Soit la fonction $g$ définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par: $g(x) = 1 - 2x\tan(x)$ .

1/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une unique solution $\beta$ et que $\beta \in ]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[$ .

2/ Soit $f$ la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \sqrt{|x|}\cos(x)$ .

a) Montrer que $f$ est paire .

b) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

c) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et que $\forall x \in ]0,\frac{\pi}{2}]$ : $f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}g(x)$

d) Etudier les variations de $f$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ puis construire $C_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

e) Donner un encadrement de $f(\beta)$ et montrer que $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ on a : $f(x) < 1$.

3/ Soit $h$ la fonction définie sur $[\beta,\frac{\pi}{2}]$ par : $h(x) = \cos(x) - \sqrt{x}$.

a) Etudier les variations de $h$.

b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]\frac{\pi}{6},\beta[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

*Il sera tenu compte de la rédaction et la bonne présentation de la copie .*